

Kollokvium 12
Bosoner og fermioner

28. april 2015

I dette kollokviet skal vi se på noen forskjeller mellom bosoner og fermioner. Under finner dere to oppgaver, først en diskusjonsoppgave som handler om å få en bedre forståelse for hva spinn kan si oss, og tilslutt en tidligere eksamensoppgave som viser noe av det vi kan finne på å spørre om. Jobb gjerne sammen.

Oppgave 1

Elementærpartikler kommer med forskjellig spinn. Fotonene vi snakket mye om i begynnelsen av dette kurset er bosoner og har spinn-1,¹ elektroner er som kjent fermioner og har spinn- $\frac{1}{2}$. Det finnes mange andre spinn- $\frac{1}{2}$ partikler slik som kvarker og de spøkelsesaktige nøytrinoene som utgjør materien i universet. Vi kjenner imidlertid bare til en eneste elementærpartikkel som har spinn-0 og det er det mystiske, og nylig oppdagede, Higgsbosonet.

Når vi ser på prosesser som skjer mellom elementærpartiklene kan vi benytte oss av at spinn, akkurat som angulærmoment, er bevart, både totalt og i z -retningen. Egentlig er det summen av spinn og angulærmoment som er bevart, dette kaller vi ofte for **totalt angulærmoment**. Vi minner om reglene for å legge sammen spinn \vec{S} og angulærmoment \vec{L} , eller bare to spinn,² til totalt angulærmoment \vec{J} :

$$\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}, \quad (1)$$

hvor \hat{J}^2 har egenverdiene $\hbar^2 j(j+1)$, hvor $j = |l-s|, \dots, l+s$, og \hat{J}_z har egenverdiene $\hbar m_j$, hvor $m_j = -j, \dots, j$.

Når man lager et Higgsboson ved Large Hadron Collider så vil det straks henfalle til andre kjente partikler, for eksempel fotoner eller elektroner. Forsøk å diskutere dere frem til svarene på følgende spørsmål:

- Hvorfor kan ikke et Higgsboson henfalle til tre nøytrinoer? Eller tre fotoner for den saks skyld?
- Higgsbosonet kan henfalle til to elektroner (et vanlig elektron og et positron, antipartikkelen). Hva kan du si om spinnet til de to elektronene?
- Hva kan du si om spinnet til to fotoner som Higgsbosonet henfaller til?

Oppgave 2 Oppgave fra eksamen våren 2012

Vi ser på en partikkel med masse m innestengt i en tre-dimensjonal boks (også kalt uendelig tre-dimensjonal brønn) med sider av lengde (L_1, L_2, L_3) . Potensialet er null inne i boksen og uendelig utenfor.

¹Det er imidlertid en komplikasjon med partikler som ikke har masse som vi ikke har nevnt i kurset. Disse kan ikke være i tilstanden $m_s = 0$. Dette henger sammen med spesiell relativitetsteori og at vi ikke kan finne et hvilesystem hvor fotonet står i ro.

²Om du vil så tenkt deg dette som summen $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$.

Ved å bruke separasjon av variable i kartesiske koordinater finner man at egentilstandene til Hamiltonoperatoren er et produkt av tre egentilstander for en partikkel i en en-dimensjonal boks:

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{L_1 L_2 L_3}} \sin\left(\frac{\pi n_1}{L_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi n_2}{L_2} y\right) \sin\left(\frac{\pi n_3}{L_3} z\right), \quad (2)$$

hvor $n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots$, med de tilhørende energiene

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left[\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{L_3}\right)^2 \right]. \quad (3)$$

- a) Finn partikkelens energi E_0 i grunntilstanden. Anta at dette dreier seg om et elektron med masse $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$, og at sidekantene på boksen er $L_1 = L_2 = L$ og $L_3 = L/2$, hvor $L = 2.0 \text{ nm}$. [2 poeng]
- b) Finn partikkelens energi i det første eksiterte nivået uttrykt ved E_0 . Angi eksplisitt for hvilke kombinasjoner av kvantetallene (n_1, n_2, n_3) denne energien oppstår. Hva menes med at et energinivå er *degenerert* og hva er *degenerasjonsgraden* til det første eksiterte nivået? [4 poeng]
- c) Forklar kort hva Paulis eksklusjonsprinsipp sier og finn, uttrykt ved E_0 , den laveste energien som et system av seks elektroner kan ha i boksen vi har beskrevet over. Vi antar her at vi kan se bort fra Coulombvekselvirkninger mellom elektronene. [4 poeng]
- d) Vi antar nå at partiklene er identiske partikler med samme masse som elektronet, men at de er bosoner. Hva er da den laveste energien? Hva blir den laveste energien dersom vi antar at partiklene er fermioner med spinn $s = 3/2$? [3 poeng]