Kollokvium 2
Mer matematikk i FYS2140

29. januar 2015

Det andre kollokviet i FYS2140 fortsetter der det første slapp, og ser mer på matematikken som vi bruker. Under gir vi to oppgaver som du kan prøve deg på på Kollokvium, og få hjelp med dersom du trenger det. Den første oppgaven dreier seg om statistikk og sannsynlighetsfordelinger som vi skal jobbe mye med i kurset. Dette er Oppgave 1.3 i Griffiths. Dersom det er begreper her som du ikke kjenner til, eller ikke husker, ta gjerne en titt i Avsnitt 1.3.2 i Griffiths som oppsummerer det du trenger. Den andre oppgaven dreier seg om en teknikk for løsning av differensialligninger, **separasjon av variable**, som vi kommer til å møte flere ganger i kurset.

Oppgave 1 Statistikk

Vi betrakter den gaussiske sannsynlighetsfordelingen

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}, \tag{1}$$

hvor A, a og λ er positive reelle konstanter. Slå opp integraler du behøver i Rottmann.

a) Bruk kravet om bevaring av sannsynlighet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1, \tag{2}$$

til å bestemme A.

b) Finn forventningsverdien til x

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\, dx, \tag{3}$$

forventningsverdien til x^2

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(x)\, dx, \tag{4}$$

og standardavviket $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.

c) Tegn grafen til $\rho(x)$.

Oppgave 2 Differensialligninger

En vanlig teknikk for å løse (partielle) differensialligninger er såkalt **separasjon av variable**. Dette er nyttig for oss fordi det meste av FYS2140 går ut på å løse nettopp en bestemt slik ligning, Schrödingerligningen. Vi skal her, som en oppvarming, se på et annet ofte brukt eksempel, som er ligningen:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{5}$$

hvor du skal finne funksjonen $u(x,t)$ gitt noen grensebetingelser: $u(x,0) = f(x)$, og $u(0,t) = 0$ og $u(L,t) = 0$.

Dette ikke et tilfeldig matematisk uttrykk. Denne ligningen har en viktig fysisk betydning: det er **varmeledningsligningen** som beskriver hvordan temperaturen $u(x,t)$ i en stang med lengde L endrer seg med posisjonen x og tiden t. Konstanten a er den såkalte diffusjonskonstanten.[1] Grensebetingelsene i problemet forteller oss hvordan temperaturen i stangen er ved tiden $t = 0$ gjennom funksjonen $f(x)$ og at temperaturen i endene av stangen ($x = 0$ og $x = L$) holdes på $0°$ C gjennom kontakt med et annet materiale.[2]

Ved separasjon av variable antar vi at en løsningen på problemet kan skrives som et produkt av to (eller flere) funksjoner som hver bare avhenger av en av variablene. Her vil vi bruke de to funksjonenen $X(x)$ og $T(t)$, og antar at vi kan skrive løsningen som

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{6}$$

Vi forsøker så å dele ligningen inn i to deler som hver bare avhenger av en av variablene x og t.

a) Vis at når vi setter (6) inn i (5) så får vi

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{aT(t)}\frac{dT(t)}{dt}. \tag{7}$$

Fordi vi kan velge å endre en variabel, x eller t, om gangen, så må hver side av ligningen være konstant. Denne konstanten kaller vi for $-\sigma$. Vi kan nå løse de to ligningene:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\sigma \quad \text{og} \quad \frac{1}{aT(t)}\frac{dT(t)}{dt} = -\sigma. \tag{8}$$

b) Vis at ligningen for tidsavhengigheten har løsningen

$$T(t) = Ce^{-a\sigma t}, \tag{9}$$

hvor C er en vilkårlig konstant. Hvorfor kan vi uten problem sette $C = 1$?

c) Det viser seg at vi må ha $\sigma > 0$ i fysiske løsninger, kan du forklare hvorfor det må være tilfelle? *Hint:* Tenk på de fysiske konsekvensene av $\sigma < 0$.

Vi lærte i Oblig 1 (Oppgave 2c) at ligningen for $X(x)$ har løsningene

$$X(x) = A\sin(\sqrt{\sigma}x) + B\cos(\sqrt{\sigma}x). \tag{10}$$

[1] For spesielt interesserte er den gitt som $a = \kappa/\rho s$, hvor κ den termiske ledeevnen til stangen, ρ er massetettheten i materialet og s er den spesifikke varmekapasiteten.

[2] Vi kunne selvsagt valgt en annen vilkårlig konstant temperatur her.

d) Bruk grensebetingelsene for endene av stangen for å bestemme B og σ, og vis at vi får løsningen

$$u(x,t) = A \sin{(n\pi x/L)} e^{-an^2\pi^2 t/L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots . \tag{11}$$

Vi har nå funnet en *spesifikk* løsning av varmeledningsligningen ved bruk av separasjon av variable teknikken, men du lurer kanskje på hvordan man finner den generelle løsningen, som slett ikke trenger la seg separerer slik som vi anntok i (6)? Eller hvordan man finner en løsning som oppfyller grensebetingelsen $u(x,0) = f(x)$ for en vilkårlig funksjon $f(x)$? Her kommer Fouriers teorem oss til unnsetning, dette sier at vi kan gjenskape funksjonen $f(x)$ ved en uendelig sum av sinusfunksjoner,[3] altså spesifikke løsninger med forskjellig n. Uten at vi vil diskutere dette i mer detalj her blir den generelle løsningen den uendelige summen:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin{(n\pi x/L)} e^{-an^2\pi^2 t/L^2}, \tag{12}$$

hvor A_n velges slik at $u(x,0) = f(x)$. I praksis, hvis vi skal se på et konkret varmeledningsproblem, så blir det et spørsmål om hvor mange ledd av denne uendelige summen vi trenger for å gjenskape $u(0,x) = f(x)$ godt nok.

[3] I alle fall så lenge $f(x)$ oppfører seg pent nok.