INF1040 – høsten 2008 – Obligatorisk oppgave nr 3

Tallsystemer, sampling og kvantisering

Innlevering: Fredag 31. oktober 2008.

Formaliteter

- Besvarelsen skal være et tekst-dokument.
- Besvarelsen skal konverteres til en pdf-fil.
- Pdf-filen skal ha navn på formen oblig3-dittbrukernavn.pdf, for eksempel oblig3-fritz.pdf
- Besvarelsen sendes til gruppelærer som et vedlegg til en e-post innen fristen.
- E-posten ***skal*** ha "subject" INF1040: Innlevering Oblig 3.

For å lage en pdf-fil kan du først lage en postscript-fil med kommandoen print (men send output til en fil istedenfor til en printer), og så kjøre programmet ps2pdf med postscript-filen som input.
Her er et eksempel der filen oblig3-fritz.txt konverteres til filen oblig3-fritz.pdf:

```
print -o oblig3-fritz.ps oblig3-fritz.txt
ps2pdf oblig3-fritz.ps
```

Hvis du ønsker å formattere besvarelsen som noe mer enn ren tekst, kan du f.eks. bruke Word, OpenOffice (alternativ til Microsoft Office, bruk kommandoen ooffice i Unix/Linux), eller LATEX (mye brukt i akademiske miljøer, se introduksjon på http://heim.ifi.uio.no/~dag/LaTeX-intro.pdf og/eller http://heim.ifi.uio.no/~ifidrift/doc/LaTeX-for-nybegynnere.pdf).
Uansett hva du velger skal besvarelsen konverteres til pdf før levering.

Oppgaven skal løses individuelt, og må være godkjent for å kunne gå opp til eksamen.

Forsiden på besvarelsen skal inneholde navn, brukernavn, e-postadresse på UiO, samt formuleringen

> Jeg har lest og forstått reglene som er gitt i dokumentet
> "Krav til innleverte oppgaver ved Institutt for Informatikk" på
> http://www.ifi.uio.no/studinf/skjemaer/erklaring.pdf.

Spør gruppelæreren om hjelp hvis du har problemer!

Oppgave 1: Heltall - Fibonacci-tallene

Fibonaccifølgen

er en tallfølge som kan definere ved:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n = 0; \\ 1 & \text{hvis } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{ellers} \end{cases}$$

Eller verbalt: Du starter med 0 og 1, og produserer det neste Fibonacci-tallet i tallfølgen ved å legge sammen de to forrige Fibonacci-tallene.

De første 10 Fibonacci-tallene er 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

a) Vi vet at vi kan representere et positivt heltall X som en veiet sum av toerpotenser, der vektene er enten 0 eller 1; altså en binær representasjon:

$$X = s_1 * 2^{(n-1)} + s_2 * 2^{(n-2)} + \ldots + s_{n-1} * 2^{(1)} + s_n * 2^{(0)}$$

Men vi kan også representere alle heltall som en veiet sum av Fibonacci-tall med binære vekter. Fyll ut tabellen nedenfor. Merk at vi dropper innledende 0-er slik at ordlengdene blir ulike, og vi tillater ikke to 1-ere etter hverandre i representasjonen av et heltall.

b) Finn ut hvor mange biter vi trenger for å representere de første 20 positive heltallene i titallsystemet når vi bruker Fibonacci-tallene på denne måten.

13	**8**	**5**	**3**	**2**	**1**	
					1	**1**
				1	0	**2**
			1	0	0	**3**
			1	0	1	**4**
		1	0	0	0	**5**
		1	0	0	1	**6**
		1	0	1	0	**7**
						8
						9
						10
						11
						12
						13
						14
						15
						16
						17
						18
						19
						20

c) Hvorfor er det naturlig å ikke tillate to 1-ere etter hverandre i en slik ”Zeckendorf-representasjon” eller ”minimal Fibonacci bit representasjon”, som er den Fibonacci-representasjonen av et heltall som har færrest 1-ere?

Oppgave 2: Desimaltall – ”det gyldne snitt”

En av egenskapene ved Fibonacci-tallene er at forholdet mellom ett Fibonacci-tall og det foregående Fibonacci-tallet nærmer seg ”det gyldne snitt”, $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 = 1.618033989..$, når n øker. Det gyldne snitt bygger på en harmonisk deling av et linjestykke. Snittet deler linjestykket slik at forholdet mellom den lengste og den korteste delen er like stort som forholdet mellom hele linjestykket og den lengste delen av det.
Dette er et irrasjonalt tall som har den unike egenskap at $1/\varphi = \varphi - 1$. Altså har $1/\varphi$ de samme desimalene som φ.

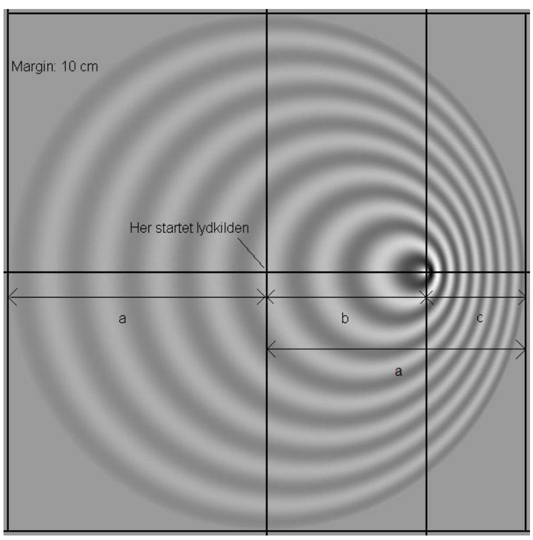
a) Vi kan skrive et desimaltall N i titallsystemet (f.eks. 0.618...) som en veiet sum av <u>negative</u> toerpotenser: $N = c_1 * 2^{-1} + c_2 * 2^{-2} + c_3 * 2^{-3} + \ldots + c_n * 2^{-n} + \ldots$ der hver c er enten 0 eller 1. Rekken av koeffisienter $c_1 c_2 c_3 c_4 \ldots$ utgjør da bitmønsteret i den binære representasjonen av tallet.
Med det avrundede tallet $1/\varphi = 0.618$ som utgangspunkt finner vi at den binære representasjonen er $1/\varphi \approx 0.10011110001101010\,0111\ldots_2$
Hvor mange av disse desimal-bitene trenger vi for å representere $1/\varphi = 0.618$ (med 3 desimaler) etter vanlige avrundingsregler? Begrunn svaret!

Oppgave 3: Sampling og kvantisering

Det gyldne snitt finner man igjen mange steder i naturen og på menneskekroppen, bl.a. i ansiktet. Det er også et viktig visuelt virkemiddel i kunst og arkitektur.

Flere kunstnere arbeider med dekorasjoner til IFI2-bygget. En av dem kan bli et 1:1 relieff av bølgeflaten fra en lydkilde som sender ut et sinusoid-signal med frekvens lik tonen A_5 (880 Hz) som forplanter seg i luft, der vi antar at lydhastigheten er v=340 m/s. Lydkilden beveger seg mot høyre med en hastighet v_s = 210 m/s, slik at vi får ulik Doppler-forskyvning av frekvensen i ulike retninger.

Et utsnitt av et ”frosset” bilde av denne bølgende flaten er laget slik at det er et harmonisk forhold (1.618) mellom hvor langt lyden har gått og hvor langt lydkilden har beveget seg, som vist på illustrasjonen nedenfor.



a) Hva blir lengste og korteste bølgelengde i bildet, uttrykt i millimeter?

b) Hvis vi skal punkt-sample den kontinuerlige lydflaten med ekvidistante diskrete sampler (som ligger som hjørner i like store kvadrater), slik at den senere kan rekonstrueres eksakt fra de diskrete digitale samplene, hvor mange sampler må vi minst ta hvis flaten er 6 x 6 meter?

c) Hvis vi holder oss strengt til Nyqvist-kriteriet i den retningen lydkilden beveger seg, hvor stor blir da oversamplingen i motsatt retning?

d) Vi antar at amplituden i bildet av lydflaten – fra den laveste bunn til den høyeste topp – er 60 cm, og vi ønsker å representere bølgehøyden i hvert samplingspunkt med en nøyaktighet på 0.5 mm. Vi ønsker for enkelhets skyld å representere hver samplet verdi med et positivt heltall på en passende skala.

- Hvor mange biters ordlengde trenger vi da i hvert samplingspunkt?
- Hvor stor del av skalaen vil ikke bli brukt?
- Hva blir nøyaktigheten i representasjonen av bølgehøyden hvis vi reduserer ordlengden med en bit i hvert samplingspunkt, og tilpasser skalaen vår til amplituden?

Lykke til!