INF2220 - Algoritmer og datastrukturer

HØSTEN 2007

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

INF2220, forelesning 11:
Grafer II

Dagens plan

- Avsluttende om grådige algoritmer
  - Huffman-koding (kap. 10.1.2)
- Dynamisk programmering
  - Floyds algoritme for korteste vei alle-til-alle (kap. 10.3.4)
- Paradigmer for algoritmedesign

Koding av tegn

Det finnes mange standarder for koding av tegn. Noen av de viktigste er:

- Hollerith 12-bits hullkortkode
  Brukt på mekaniske datamaskiner før de elektroniske var oppfunnet
- BCD (Binary Coded Decimal)
  4-bits kode brukt av IBM til koding av desimale sifre
  (BCD ble også brukt om 6-bits tegn på noen tidlige datamaskiner)
- EBCDIC (Extended Binary Coded Decimal Interchange Code)
  IBMs 8-bits utvidelse av BCD til fullt tegnsett
- ASCII (American (National) Standard Code for Information Interchange)
  7-bits (senere 8-bits) tegn
- Unicode 16-bits tegn (Egentlig variabelt 8–32 bit)
  ISO-standard for alle tegn i alle språk

Huffman-koding

Motivasjon

- Store tekstfiler tar stor plass, og tar lang tid å overføre over nettet
- Tidligere var ASCII og EBCDIC de rådende standardene
  - Begge brukte 8-bits tegnkoder (ASCII brukte 7-bits kode + paritetsbit)
  - Dette ble ansett som sløsing med plass
- Unicode bruker (stort sett) 16-bits koder,
  men 32-bits koder blir også brukt
  - Unicode har $17 \cdot 2^{16} = 1\ 114\ 112$ mulige tegn
  - Selv i store tekstfiler blir bare noen få av disse brukt
  - Unicode gir minst dobbelt så store filer som ASCII
- *Konklusjon*
  Det er behov for datakompresjon

Idé og regler

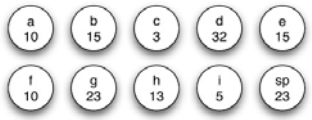
- Hovedidé:
  Ofte forekommende tegn skal ha korte koder, mens sjeldne tegn kan ha lange koder
- Regel 1:
  Hvert tegn som forekommer i filen, skal ha sin egen entydige kode
- Regel 2:
  Ingen kode er prefiks i en annen kode
- Eksempel på regel 2:
  Dersom 011001 er (binær)kode for et tegn, kan hverken 0, 01, 011, 0110 eller 01100 være kode for noe tegn

Algoritme

- Lag en frekvenstabell for alle tegn som forekommer i datafilen
- Betrakt hvert tegn som en node, og legg dem inn i en prioritetskø P med frekvensen som vekt
- Mens P har mer enn ett element
  - Ta ut de to minste nodene fra P
  - Gi dem en felles foreldrenode med vekt lik summen av de to nodenes vekter
  - Legg foreldrenoden inn i P
- Huffmankoden til et tegn (bladnode) får vi ved å gå fra roten og gi en '0' når vi går til venstre og '1' når vi går til høyre
- Resultatfilen består av to deler:
  - En tabell over Huffmankoder med tilhørende tegn
  - Den Huffmankodede datafilen

Eksempel

Initiell prioritetskø:



De to minste (sjeldnest forekommende) nodene er c og i.
Disse taes ut og erstattes med T1:

Dernest erstattes T1 og a med T2:

Så går f og h ut. De erstattes av T3:

Så erstattes b og e med T4:

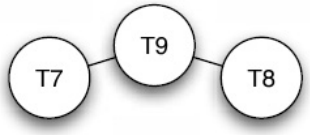
Dernest T2 og g med T5:

Så byttes sp og T3 ut med T6:

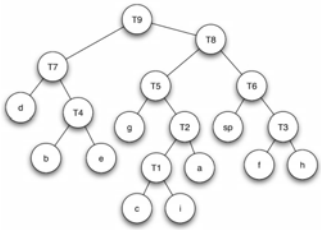
Så d og T4 med T7:

Så T5 og T6 med T8:

Endelig taes T7 og T8 ut av køen.
Disse blir barn av rotnoden T9:



Det ferdige kodetreet ser slik ut:



Det gir denne kodetabellen:

a	–	1011	f	–	1110
b	–	010	g	–	100
c	–	10100	h	–	1111
d	–	00	i	–	10101
e	–	011	sp	–	110

Kodetabell

a	–	1011	f	–	1110
b	–	010	g	–	100
c	–	10100	h	–	1111
d	–	00	i	–	10101
e	–	011	sp	–	110

Eksempel:

caddie hadde bad i hagebed

har følgende Huffmankode:

10100101 10000101
01011110 11111011
00000111 10010001
10101011 10111110
11100011 01001100

Vi brukte altså 10 byte på 26 tegn med dette 10-tegns alfabetet

Dekodingstabell

00	–	d	10101	–	i
010	–	b	1011	–	a
011	–	e	110	–	sp
100	–	g	1110	–	f
10100	–	c	1111	–	h

Dynamisk programmering

- Brukes først og fremst når vi ønsker optimale løsninger
- Må kunne dele det globale problemet i *delproblemer*
  - Disse løses typisk ikke-rekursivt ved å lagre del-løsningene i en tabell
- En optimal løsning på det globale problemet må være en sammensetning av optimale løsninger på (noen av) delproblemene
- Vi skal se på ett eksempel:
  Floyds algoritme for å finne korteste vei alle-til-alle i en rettet graf

Korteste vei alle-til-alle (Floyd)

Vi ønsker å beregne den korteste veien mellom ethvert par av noder i en *rettet, vektet* graf

- Grunnleggende idé:
  Hvis det går en vei fra node ***i*** til node ***k*** med lengde ***ik***, og en vei fra node ***k*** til node ***j*** med lengde ***kj***, så går det en vei fra node ***i*** til node ***j*** med lengde ***ik*** + ***kj***
- Floyds algoritme:
  Denne betraktningen gjentas på en systematisk måte for alle tripler ***i***, ***k*** og ***j***:
  - Initielt: Avstanden fra node ***i*** til node ***k*** settes lik vekten på kanten fra ***i*** til ***k***, uendelig hvis det ikke går noen kant fra ***i*** til ***k***
  - Trinn 0: Se etter mulige forbedringer ved å velge node 0 som mellomnode
  - Etter trinn k: Avstanden mellom to noder er den korteste veien som bare bruker nodene 0, 1, . . . , ***k*** som mellomnoder

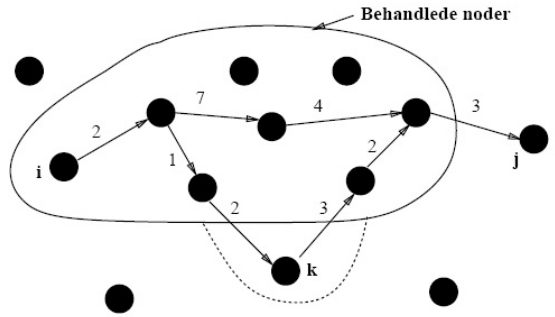
Floyds algoritme

```
public static void kortesteVeiAlleTilAlle(
       int[ ][ ] nabo, int[ ][ ] avstand, int[ ][ ] vei) {
  // arrayene er kvadratiske med samme dimensjon
  int n = avstand.length;

  // initialisering
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++) {
        avstand[i][j] = nabo[i][j];
        vei[i][j] = -1;          // Ingen vei foreløpig
    }
  }

  for (int k = 0; k < n; k++) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
      for (int j = 0; j < n; j++) {
        if (avstand[i][k] + avstand[k][j] < avstand[i][j]) {
            // Kortere vei fra i til j funnet via k
            avstand[i][j] = avstand[i][k] + avstand[k][j];
            vei[i][j] = k;
...}
```


Hvorfor virker Floyd?

Floyd-invarianten:

avstand*[*i*][*j*]** vil være lik lengden av den korteste veien fra node ***i til node ***j*** som har alle sine indre noder behandlet



FØR:	ETTER:
A(i,j)=16	A(i,j)=13
A(i,k)=5	.....
A(k,j)=8	.....

Hvordan tolke resultatet av Floyd

- Ved start inneholder ***nabo[i][j]*** lengden av kanten fra ***i*** til ***j***, ∞ hvis det ikke er noen kant
- Floyd lar ***nabo*** være uendret og legger resultatet i ***avstand*** og ***vei***
- ***avstand[i][j]*** er lengden av korteste vei fra ***i*** til ***j***, ∞ hvis det ikke er noen vei
- ***vei*** sier hva som er den korteste veien
  - $k_1 =$ ***vei[i][j]*** er den største verdi av ***k*** slik at ***k*** ligger på den korteste veien fra ***i*** til ***j***
  - $k_2 =$ ***vei[i][]*** k_1 er den største verdi av ***k*** slik at ***k*** ligger på den korteste veien fra ***i*** til k_1 osv.
  - Når ***vei[i]*** $[k_m] = -1$, er (i, k_m) den første kanten i korteste vei fra ***i*** til ***j***

Hva gjør Floyd dynamisk?

Hovedløkken i Floyd ser slik ut:

```
for (int k = 0; k < n; k++) {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++) {
      if (avstand[i][k] + avstand[k][j] < avstand[i][j]) {
        // Kortere vei fra i til j funnet via k
        avstand[i][j] = avstand[i][k] + avstand[k][j];
        vei[i][j] = k;
      }
    }
  }
}
```


- Algoritmeinvarianten forutsetter at ***i***– og ***j***–løkken fullføres før ***k***–verdien økes
- If-testen sikrer at for en gitt ***k*** kan hverken ***avstand[i][k]*** eller ***avstand[k][j]*** bli endret i ***i***– og ***j***–løkken
- Dermed er ***i***– og ***j***–løkkene uavhengig av hverandre og kan parallelliseres (de er delproblemer som kan løses uavhengig av hverandre)
- Dette er definisjonen på dynamisk programmering

Paradigmer for algoritmedesign

Her følger en oppsummering av tre viktige paradigmer for aloritmedesign som vi gjør bruk av i dette kurset:

- Splitt og hersk
- Grådige algoritmer
- Dynamisk programmering

Splitt og hersk

Dette er en generell metode som bruker rekursjon til å designe effektive algoritmer

Den går ut på å dele et gitt problem opp i mindre delproblemer, og så rekursivt løse hvert delproblem

Rekursjonen stoppes når problemet er så lite at løsningen er triviell

Til slutt settes løsningen av delproblemene sammen til en løsning av det opprinnelige problemet

Eksempler:

- Binærsøking
- Quick-sort
- Merge-sort

Grådige algoritmer

Dette er en metode som brukes på optimaliseringsproblemer

Den går ut på å løse problemet ved å foreta en rekke valg

I hvert trinn gjør vi det valget som i øyeblikket ser ut til å bringe oss nærmest mulig løsningen

Merk: Metoden virker ikke alltid

Vi sier at problemer metoden virker på, har «grådighetsegenskapen»:

- En rekke lokale optimaliseringer vil føre til et globalt optimum

Eksempler:

- Dijkstras algoritme
- Prims algoritme
- Kruskals algoritme
- Huffman-koding

Dynamisk programmering

Dette er en annen metode som brukes på optimaliseringsproblemer

Metoden er noe vanskeligere å forstå enn «Splitt og hersk» og «Grådige algoritmer»

Metoden bør brukes på problemer som ser ut til trenge eksponensiell eksekveringstid

Dynamisk programmering gir alltid algoritmer som er polynomiske i tid, og disse algoritmene er vanligvis enkle å programmere

For at metoden skal virke, må problemet ha en viss struktur som vi kan utnytte for å oppnå denne enkle løsningen

Litt terminologi knyttet til dynamisk programmering:

- Enkle delproblemer:
  Det må finnes en måte å dele problemet opp i delproblemer som er enkle å beskrive
- Delproblem-optimalisering:
  En optimal løsning på det globale problemet må kunne settes sammen av optimale løsninger på delproblemene
- Overlapp av delproblemer:
  Optimale løsninger av urelaterte problemer kan inneholde felles delproblemer

Eksempler:

- Floyds algoritme
- Beregning av lange matriseprodukter
- 0-1 ryggsekkpakking
- Lengste felles delsekvens