INF2220 - Algoritmer og datastrukturer

HØSTEN 2007

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

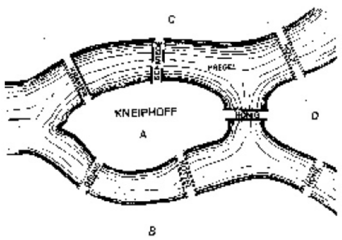
INF2220, forelesning 6:
Grafer

Dagens plan:

- Definisjon av en graf (kap. 9.1)
- Grafvarianter
- Intern representasjon av grafer (kap. 9.1.1)
- Topologisk sortering (kap. 9.2)
- Korteste vei en-til-alle uvektet graf (kap. 9.3.1)

Det første grafteoretiske problem: Broene i Königsberg

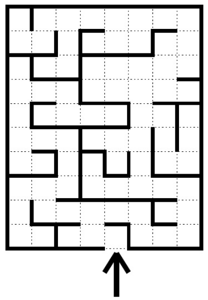
Er det mulig å ta en spasertur som krysser hver av broene nøyaktig en gang?

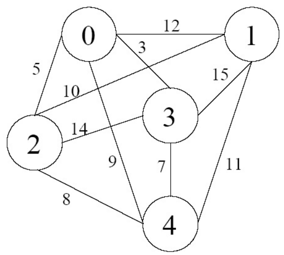


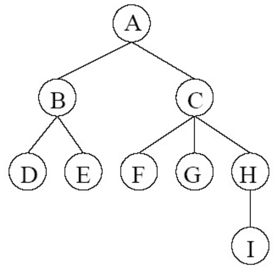
Dette problemet ble løst av Euler allerede i 1736!

Grafer vi har sett allerede

- Labyrint, rundreise, trær

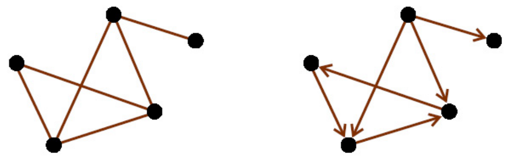






Hva er en graf?

- En graf G =(V,E) har en mengde noder, V, og en mengde kanter, E
- |V| og |E| er henholdsvis antall noder og antall kanter i grafen
- Hver kant er et par av noder, dvs. (u, v) slik at $u, v \in$ V
- En kant (u, v) modellerer at u er relatert til v
- Dersom nodeparet i kanten (u, v) er ordnet (dvs. at rekkefølgen har betydning), sier vi at grafen er rettet, i motsatt fall er den urettet

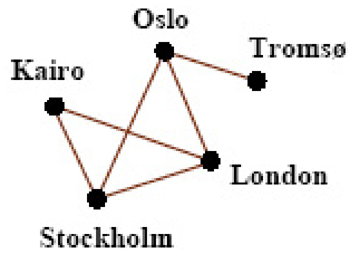


Urettet graf Rettet graf

- Grafer er den mest fleksible datastrukturen vi kjenner («alt» kan modelleres med grafer)

Hvorfor grafer?

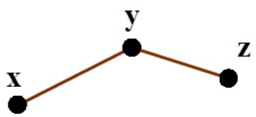
- De dukker opp i veldig mange problemer i hverdagslivet:
  - Flyplassystemer
  - Datanettverk
  - Trafikkflyt
  - Ruteplanlegging
  - VLSI (chip design)
  - og mange flere ...



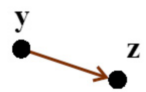
- Grafalgoritmer viser veldig godt hvor viktig valg av datastruktur er mhp. tidsforbruk
- Det finnes grunnleggende algoritmeteknikker som løser mange ikke-trivielle problemer raskt

Grafer: Definisjoner og varianter

- Node y er nabo-node (eller etterfølger) til node x dersom $(x, y) \in$ E

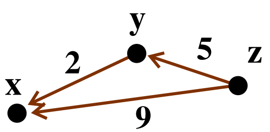


x og y er naboer,
y og z er naboer,
men x og z er ikke naboer

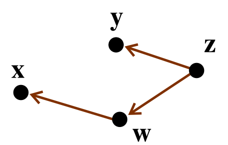


z er nabo-node til y,
men y er ikke
nabo-node til z

- En graf er vektet dersom hver kant har en tredje komponent, kalt kost eller vekt

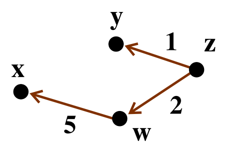


- En vei (eller sti) i en graf er en sekvens av noder $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ slik at $(v_i, v_{i+1}) \in$ E for $1 \leq i \leq n - 1$
- Lengden til veien er lik antall kanter på veien, dvs. $n - 1$



<z, w, x> er en vei
med lengde 2

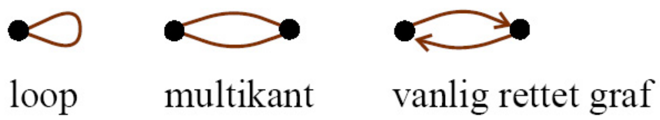
- Kosten til en vei er summene av vektene langs veien



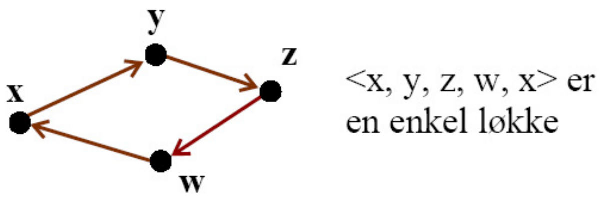
<z, w, x> er en vei
med kost 7

- En vei er enkel dersom alle nodene (untatt muligens første og siste) på veien er forskjellige

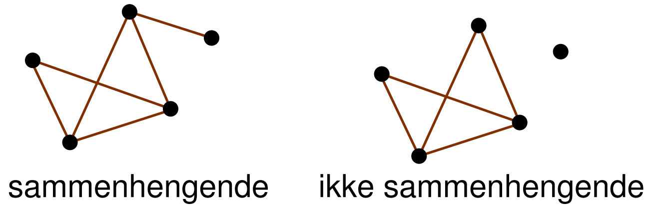
- Våre grafer har vanligvis ikke «loops», (v, v), eller «multikanter» (to like kanter):



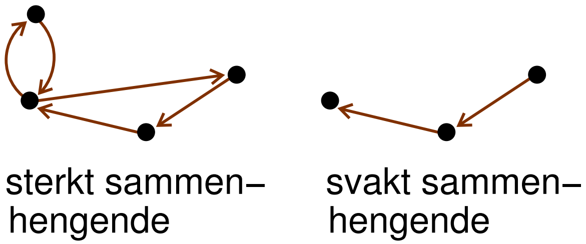
- En løkke (sykel) i en rettet graf er en vei med lengde ≥ 1 slik at $v_1 = v_n$. Løkken er enkel dersom stien er enkel
- I en urettet graf må også alle kanter i løkken være forskjellige



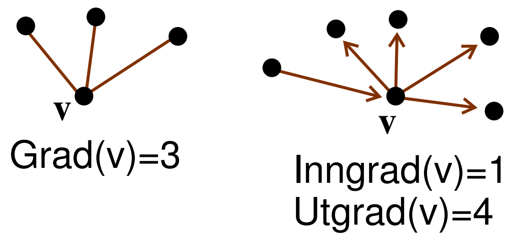
- En rettet graf er asyklisk dersom den ikke har noen løkker
- En rettet, asyklisk graf blir ofte kalt en DAG (Directed, Acyclic Graf)
- En urettet graf er sammenhengende dersom det er en vei fra hver node til alle andre noder



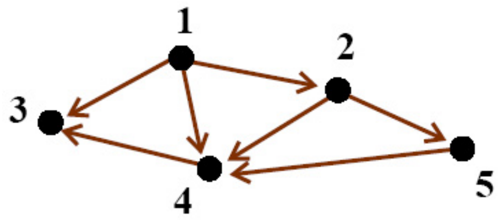
- En rettet graf er sterkt sammenhengende dersom det er en vei fra hver node til alle andre noder
- En rettet graf er svakt sammenhengende dersom den underliggende urettede grafen er sammenhengende



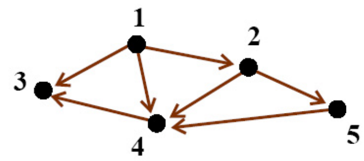
- Graden til en node i en urettet graf er antall kanter mot noden
- Inngraden til en node i en rettet graf er antall kanter inn til noden
- Utgraden til en node i en rettet graf er antall kanter ut fra noden.



Hvordan representere grafer?



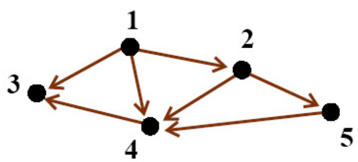
Nabo-matrise

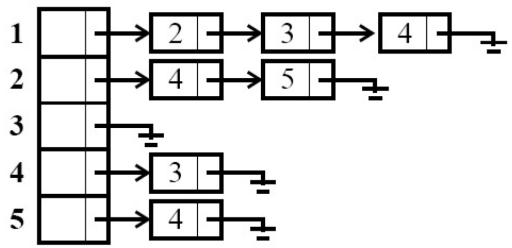


	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0

- Bra hvis «tett» graf, dvs. $|E| = \Theta(|V|^2)$
- Det tar $\mathcal{O}(|V|)$ tid å finne alle naboer
- skip!

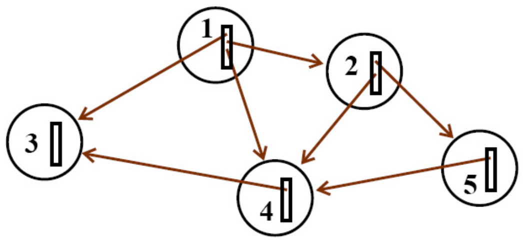
Nabo-liste





- Bra hvis «tynn» (“sparse”) graf
- Tar $\mathcal{O}(\text{Utgrad}(v))$ tid å finne alle naboer til v
- De fleste grafer i det virkelige liv er tynne!

Objekter & array



- I Java kan grafer også representeres ved en kombinasjon av node-objekter og etterfølgerarrayer
- Arraylengden kan være en parameter til node-klassens «constructor»:

```
class Node {
    int antEtterf;
    Node[ ] etterf;    Float[ ] vekt;

    Node(int ant) {
        etterf = new Node[ant];    vekt = new Float[ant];
        antEtterf = ant;
    }
}
```

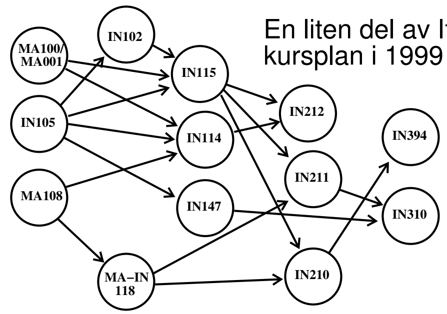
- Da må vi vite antall etterfølgere når vi genererer noden
- Eventuelt kan vi *estimere* en øvre grense og la siste del av arrayen være tom
- Vi trenger da en variabel som sier hvor mange etterfølgere en node *faktisk* har

Topologisk sortering

- En topologisk sortering er en ordning (rekkefølge) av noder i en DAG slik at dersom det finnes en vei fra v_i til v_j, så kommer v_j **etter** v_i i ordningen
- Topologisk sortering er umulig hvis grafen har en løkke
- Vanligvis er det flere mulige løsninger

Eksempel:
forutsetter/bygger på graf

- En topologisk sortering er en «lovlig» rekkefølge å ta alle kursene på Ifi i

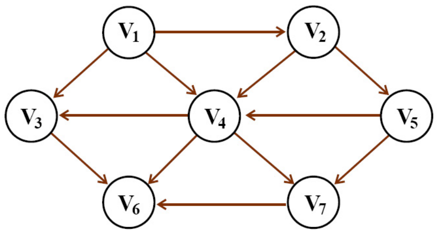


En liten del av Ifis kursplan i 1999

Følgende enkle algoritme finner en topologisk sortering (hvis det er noen):

1. Finn en node med inngrad = 0
2. Skriv ut noden, og fjern noden og utkantene fra grafen (marker noden som «ferdig» og reduser inngraden til nabonodene)
3. Gå tilbake til punkt 1

Eksempel (figur 9.4):



Algoritme for topologisk sortering (MAW side 322, figur 9.5)

```
void topsort() {
    Node v;

    for (int teller = 0; teller < ANTALL_NODER; teller++) {
        v = finnNyNodeMedInngradNull();

        if (v == null) {
            error("Løkke funnet!");

        } else {
            < Skriv ut v som node 'teller' >
            for < hver nabo w til v > {
                w.inngrad--;
            }
        }
    }
}
```

- Denne algoritmen er $\mathcal{O}(|V|^2)$ siden finnNyNodeMedInngradNull ser gjennom hele node/inngrad-tabellen hver gang
- Unødvendig: bare noen få av verdiene kommer ned til 0 hver gang

En forbedring er å holde alle noder med inngrad=0 i en *boks*.

Boksen kan implementeres som en stakk eller en kø:

1. Plasser alle nodene med inngrad=0 i boksen.
2. Ta ut en node v fra boksen.
3. Skriv ut v.
4. Fjern v fra grafen og reduserer inngraden til alle etterfølgerne.
5. Dersom noen av etterfølgerne får inngrad=0, settes de inn i boksen.
6. Gå tilbake til punkt 2.

Forbedret algoritme MAW side 323, figur 9.7)

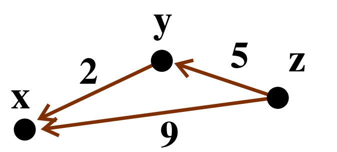
```
void topsort() {
    Kø k = new Kø();
    Node v;
    int teller = 0;

    for < hver node v >
        if (v.inngrad == 0) k.settInn(v);

    while (!k.isEmpty()) {
        v = k.taUt();
        < Skriv ut v >;
        teller++;

        for < hver nabo w til v > {
            w.inngrad--;
            if (w.inngrad == 0) k.settInn(w);
        }
    }
    if (teller < ANTALL_NODER) error("Løkke␣funnet!");
}
```


- Forutsatt at vi bruker nabolister, er denne algoritmen $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.
  Kø/stakk-operasjoner tar konstant tid, og hver node og hver kant blir bare behandlet én gang.

Korteste vei, en-til-alle

I korteste vei problemet (en-til-alle) har vi gitt en (muligens vektet) graf G=(V,E) og en node s.

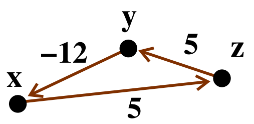
Vi ønsker å finne den korteste veien (evt. med vekter) fra s til alle andre noder i G.



- Korteste vei fra z til x uten vekt er 1.
- Korteste vei fra z til x med vekt er 7 (via y).

(Vi skal senere se på korteste vei alle-til-alle, slik som i NAFs veibok)

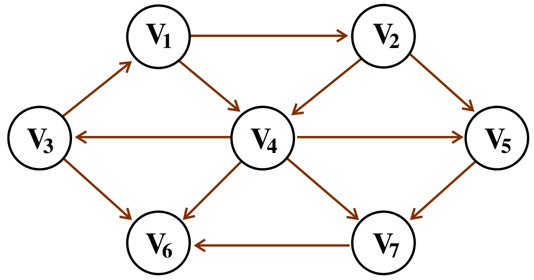
- Negative vekter (kost) i løkker kan skape problemer:



Hvor mye koster korteste vei fra x til z?

Korteste vei i en uvektet graf

Korteste vei fra s til t i en uvektet graf er lik veien som bruker færrest antall kanter.



(Det tilsvarer at alle kanter har vekt=1)

- Følgende bredde-først algoritme løser problemet for en node s i en uvektet graf G:
  1. Marker at lengden fra s til s er lik 0.
     (Merk at s foreløpig er den eneste noden som er markert.)
  2. Finn alle etterfølgere til s.
     Marker disse med avstand 1.
  3. Finn alle umarkerte etterfølgere til nodene som er på avstand 1.
     Marker disse med avstand 2.
  4. Finn alle umarkerte etterfølgere til nodene som er på avstand 2.
     Marker disse med avstand 3.
  5. Fortsett til alle noder er markert, eller vi ikke har noen umarkerte etterfølgere.
- Finnes det fortsatt umarkerte noder, kan ikke hele G nåes fra s.
- Hvis G er urettet, skjer dette hvis og bare hvis G er usammenhengende.

Vi kan finne den korteste veien ved å sette bakoverpekere til den noden som «oppdaget» oss (MAW side 328, figur 9.16)

```
void uvektet(Node s) {
    for < hver node v > {
        v.avstand = UENDELIG;
        v.kjent = false;
    }
    s.avstand = 0;

    for (int dist = 0; dist < ANTALL_NODER; dist++) {
        for < hver node v > {
            if (!v.kjent && v.avstand == dist) {
                v.kjent = true;
                for < hver nabo w til v > {
                    if (w.avstand == UENDELIG) {
                        w.avstand = dist + 1;
                        w.vei = v;
                    }
                }
            }
        }
    }

}
```

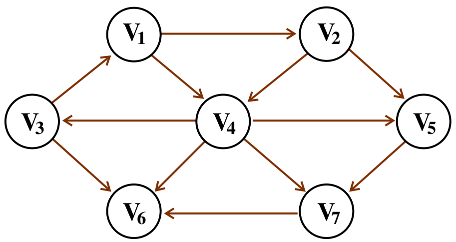
Hovedløkken vil som oftest fortsette etter at alle noder er merket, men den vil terminere selv om ikke alle noder kan nåes fra s. Tidsforbruket er $\mathcal{O}(|V|^2)$.

- Vi sparer tid ved å benytte en *kø* av noder.
- Vi begynner med å legge s inn i køen.
- Så lenge køen ikke er tom, tar vi ut første node i køen, behandler denne og legger dens etterfølgere inn bakerst i køen.
- Da blir s behandlet først. Så blir alle noder i avstand 1 behandlet før alle i avstand 2, før alle i avstand 3 ...
- Denne strategien ligner på bredde først traversering av trær (først rotnoden, så alle noder på nivå 1, så alle noder på nivå 2, osv).
- Tidsforbruket blir $\mathcal{O}(|E| + |V|)$ fordi køoperasjoner tar konstant tid og hver kant og hver node bare blir behandlet én gang.

Korteste uvektet vei fra node s (MAW side 330, figur 9.18)

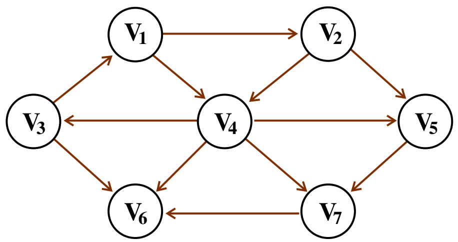
```
void uvektet(Node s) {
    Kø k = new Kø();
    Node v;
    for < hver node n > n.avstand = UENDELIG;
    s.avstand = 0;
    k.settInn(s);
    while (!k.isEmpty()) {
        v = k.taUt();
        for < hver nabo w til v > {
            if (w.avstand == UENDELIG) {
                w.avstand = v.avstand + 1;
                w.vei = v;
                k.settInn(w);
            }
        }
    }
}
```

- Bruken av kø gjør attributtet «kjent» overflødig.
- Forutsatt at vi bruker nabolister, er denne algoritmen $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.
- Kø-operasjoner tar konstant tid, og hver node og hver kant blir behandlet bare én gang.



v	avstand	vei
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Fyll ut med $s = v_3$!



v	avstand	vei
1	1	3
2	2	1
3	0	
4	2	1
5	3	2
6	1	3
7	3	4

Ferdig utfylt med $s = v_3$