UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	INF2310-Digital bildebehandling
Eksamensdag:	Tirsdag 15. mars 2016
Tid for eksamen:	09:00-13:00
Løsningsforslaget er på:	14 sider
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

- Det er 5 oppgaver i dette oppgavesettet.
- Les gjennom hele oppgavesettet før du begynner å løse oppgavene. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare det. Dersom du savner opplysninger i en oppgave, kan du selv legge dine egne forutsetninger til grunn og gjøre rimelige antagelser, så lenge de ikke bryter med oppgavens "ånd". Gjør i såfall rede for forutsetningene og antagelsene du gjør.
- Det er tilsammen 21 deloppgaver. **Hver deloppgave teller like mye**. Det lønner seg derfor å disponere tiden slik at man får besvart alle deloppgavene. Hvis du står fast på en deloppgave, gå videre slik at du får gitt et kort svar på alle deloppgavene.
- Alle svar skal begrunnes. Gjør rede for bruken av eventuelle teoremer, prinsipper eller forutsetninger slik at en tredjeperson kan følge dine resonnementer.

Oppgave 1 : Sampling og geometri

Anta at vi har et (kontinuerlig) båndbegrenset bilde der høyeste frekvens $f_{\max} = 4\text{mm}^{-1}$.

a)

Gi en grense for hvor tett to punktkilder står, hvis de så vidt kan adskilles.

Svar: Plasser en mengde tenkte punktkilder med avstand T i mellom seg på en rekke. Siden punktene kan skilles får vi da et signal med periode T i bildet. T kan ikke være mindre enn minste periode i bildet: $T >= T_{\min} = 1/f_{\max} = 1/4\text{mm}^{-1} = 0.25\text{mm}$.

b)

Hvor tett må vi sample dette bildet for å unngå aliasing?
Gi en nedre grense for *samplingsfrekvensen*, f_s.
Anta at vi har samplet bildet med en rate så vidt over denne grensen.
Svar: Samplingsteoremet krever $f_s > 2f_{\max}$, altså må $f_s > 2 * 4\text{mm}^{-1} = 8\text{mm}^{-1}$.

c)

Hvordan oppstår aliasing, og hvordan finner vi alias-frekvensen?
Svar: Noen hovedpunkter fra forelesning

d)

Beskriv hovedpunktene i baklengs geometrisk transform.
Svar: Noen hovedpunkter fra forelesning

e)

Anta at vi bruker den geometriske transformen

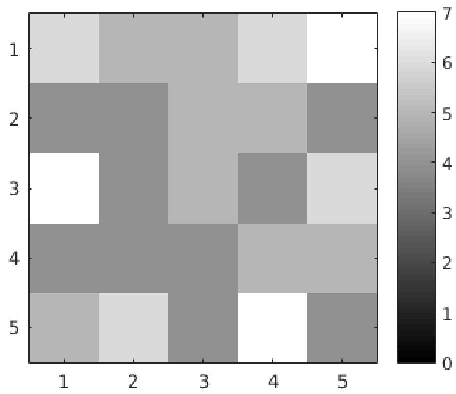
$$x' = 0.5x + 100$$
$$y' = 0.5y + 200$$

der x og y er koordinatene i "innbildet", x' og y' er de transformerte koordinatene. La oss videre anta at det benyttes en "vanlig" resampling ved baklengstransformasjon.
Hva vil den effektive samplingsraten være etter en slik transform, og hvilke (uønskede) effekter vil dette kunne gi opphav til?

Svar: Den effektive, nye samplingsraten blir halvert: $f_{sNy} = 0.5f_s$. Altså vil vi i vårt bilde, hvor vi har samplet med så lav rate som vi kan, ende opp med aliasingproblemer.

Oppgave 2 : Histogram og histogramtransform

Vi har et 5x5 gråtonebilde med 3 bits gråtoneskala:



(a) Pikslene representert som gråtoner

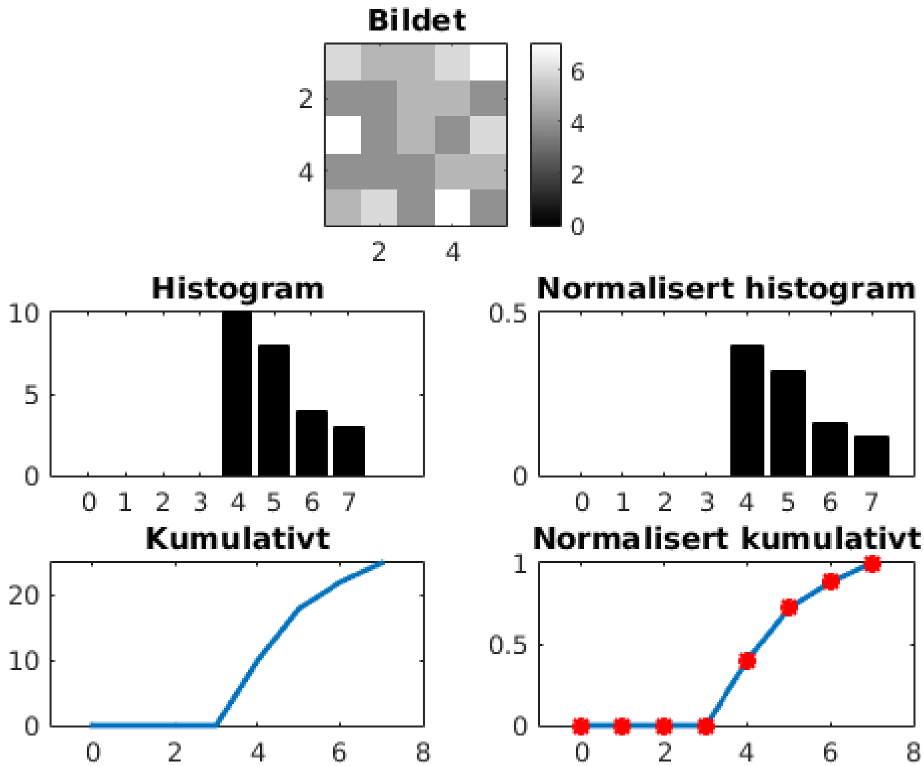
$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Pikslene som tall.

a)

Finn det normaliserte histogrammet og det normaliserte kumulative histogrammet. Skriv både verdiene og lag en skisse av det normaliserte histogrammet og det normaliserte kumulative histogrammet. Beskriv kort hva histogrammet forteller om dette bildet.

$h = [0, 0, 0, 0, 10, 8, 4, 3]$
$p = [0, 0, 0, 0, 10, 8, 4, 3]/25$
$c = [0, 0, 0, 0, 10, 18, 22, 25]$
$c_n = [0, 0, 0, 0, 10, 18, 22, 25]/25$
Histogrammet har bare verdier for de høyeste og lyse gråtoneverdiene. Altså er bildet relativt lyst og har lav kontrast.


Bildet
Histogram
Normalisert histogram
Kumulativt
Normalisert kumulativt

b)

En lineær gråtone-transformasjon er gitt av $T(i) = ai + b$.
Vi ønsker å få bedre kontrast i bildet, hvordan vil du velge parametrene a og b for å oppnå dette? Vi definerer her kontrasten som Michelson-kontrast

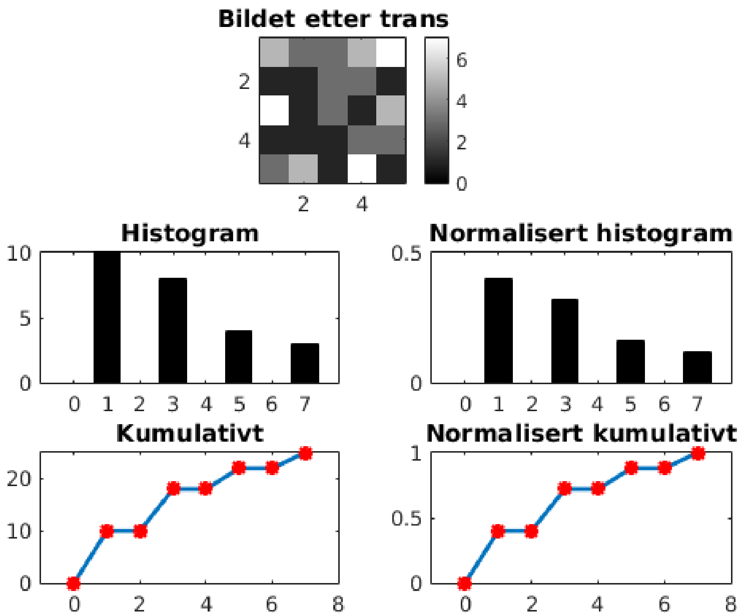
$$\frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$$

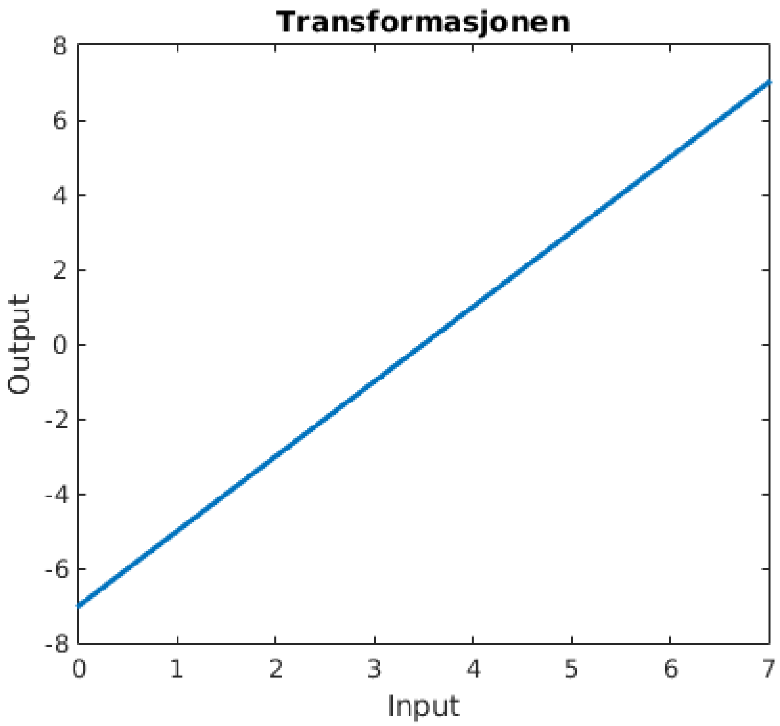
hvor I_{max} er høyeste og I_{min} er laveste verdi i bildet. Husk at vi kun har 3 bit til å representere verdiene.

Generelt gjelder: Hvis $a > 1$ “spres” søylene og gir mer kontrast i bildet, om $0 < a < 1$ får vi mindre kontrast. Er $a < 0$ inverteres bildet. NB! a påvirker også middelverdien. b flytter middelverdien (og dermed søylene i histogrammet), og gir et lysere bilde hvis $b > 0$ og et mørkere bilde om $b < 0$

Spesifikt for oppgaven: Her gjelder det å gjøre smarte valg av parametrene. Vi vet at $a > 1$ gir mer kontrast, men om vi kun har $a > 1$ vil vi klippe mange av verdiene fordi de blir høyere enn 7 (G-1) som er største tallet vi har med 3 bit. Altså må vi kompensere med å justere b også. Mulige verdier som gir bedre kontrast er feks $a = 2$ og $b = -7$. Man kan feks resonnere med at en gråtone med verdi 4, vil bli transformert til verdien 8 om vi velger $a = 2$ og vi må da kompensere med $b = -7$ for å få verdien innefor de gyldige verdiene 0 til 7. De høyeste verdiene i bildet er 7, og tilsvarende 2*7=14 som også må kompenseres med -7 for å kommer innenfor det gyldige intervallet.

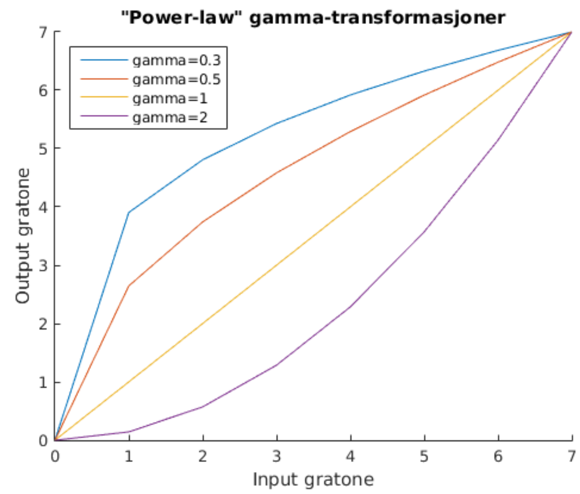
Gjennomfør transformasjonen med dine valg av parametrene a og b. Tegn en skisse av transformasjonen T, og skriv opp de resulterende verdiene for bildet. Tegn det normaliserte histogrammet for bildet etter transformasjonen.




Transformasjonen
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
Output
0
1
2
3
4
5
6
7
Input

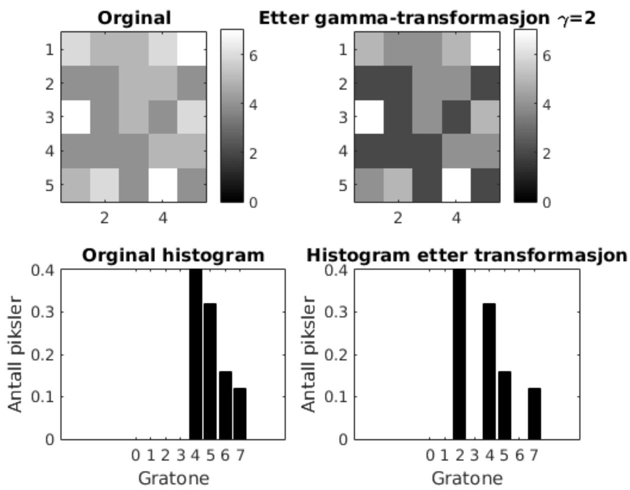
c)

Gitt de ikke-lineære gamma transformasjonene i figuren nedenfor. Hvilke gamma-transformasjon



gir økt kontrast i bildet fra oppgave a? Vi bruker samme definisjon på kontrast som tidligere. Blir resultatet bedre enn med den lineære transformasjonen i forrige oppgave?

$\gamma < 1$: Den mørke delen strekkes ut, ikke hva vi ønsker.
$\gamma = 1$: Identitestransformen
$\gamma > 1$: Den lyse delen strekkes ut, dette er hva vi ønsker og riktig svar er $\gamma = 2$
Transformasjonen, avrundet, blir $T[i] = [0, 0, 1, 1, 2, 4, 5, 7]$, altså vil resultatet gi mindre kontrast enn i forrige oppgave. Resultatet blir:



d)

Det har blitt forelest andre måter man kan oppnå økt kontrast i et gråtonebilde. Nevn to av metodene og beskriv hva de gjør med histogrammet.

Er her ute etter histogramutjevning/histogramtilpasning samt å bytte gråtoneintervall $[f1, f2]$ til $[g1, g2]$ hvor $[f1 = 4, f2 = 7]$ til $[g1 = 0, g2 = 7]$. Se forelesningsfoiler.

Oppgave 3 : Standarisering av bilder

a)

Middelverdien til et gråtonebilde kan for eksempel finnes med

$$\mu = \frac{1}{n * m} \sum_{i=0}^{G-1} ih(i),$$

hvor h er histogrammet, G er antall gråtoner og $n*m$ er antall piksler i bildet. Variansen kan finnes ved

$$\sigma^2 = \frac{1}{n * m} \sum_{i=0}^{G-1} h(i)(i-\mu)^2.$$

Finn middelverdien og variansen til bildet fra oppgave 1a.

Middelverdien:

$$\mu = \frac{1}{n * m} \sum_{i=0}^{G-1} ih(i) = \frac{1}{5*5}[0*0+1*0+2*0+3*0+4*10+5*8+6*4+7*3] = \frac{125}{25} = 5$$

Variansen:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{n * m} \sum_{i=0}^{G-1} h(i)(i-\mu)^2 \\ &= \frac{1}{5*5}[0(1-5)^2 + 0(2-5)^2 + 0(3-5)^2 \\ &+ 0(4-5)^2 + 10(5-4)^2 + 8(5-5)^2 + 4(6-5)^2 + 3(7-5)^2] \\ &= \frac{10+4+12}{25} = \frac{26}{25}.\end{aligned}$$

b)

Vi kan tenke oss at vi har et annet bilde i bildeserien med $\mu_T = 3$ og $\sigma_T = 2$. Vi vet at vi kan justere μ og σ ved å lage en gråtonetransformasjon $T = ai + b$ med parametrene

$$a = \frac{\sigma_T}{\sigma}, b = \mu_T - a\mu.$$

Vi ønsker at de to bildene skal ha samme middelverdi og varians. Finn et uttrykk for transformen.

$a = \frac{\sigma_T}{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{\frac{26}{25}}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{26}}{5}} = \frac{10}{\sqrt{26}}$

$b = \mu_T - a\mu = 3 - a5 = 3 - \frac{50}{\sqrt{26}}$

$T = ai + b = \frac{10}{\sqrt{26}} i + 3 - \frac{50}{\sqrt{26}} \approx 2i - 7$, som faktisk er den foreslåtte transformasjonen i oppgave 2b.

c)

En annen måte å standarisere et sett med bilder er å sørge for at alle bildene har tilnærmet like histogram. Dette kan gjøres ved histogramspesifikasjon. Forklar fremgangsmåten for å standarisere et sett med bilder ved hjelp av histogramspesifikasjon.

Her skal du kun beskrive fremgangsmåten, ikke regne ut verdiene.

Steg 1 : Lag transformasjonen, T(i),som gjør histogramutjevning på innbildet

Steg 2 : Gitt det ønskede histogrammet pz(i) og finn det kumulative histogrammet for å lage transformasjonen, Tg(i), som histogramutjevner det ønskede histogrammet.

Steg 3 : Finn så inverstransformen til Tg(i) og inverstransformerer det histogramutjevnede innbildet til det ønskede histogrammet.

Altså, må det orginale bildet først histogramutjevnes, før det histogramutjevnede bildet transformeres med inverstransformen til det ønskede histogrammet. Altså må bildet gjennom to transformer.
Alternativt kan disse to transformene kombineres for å gi en transformasjon som direkte transformerer innbildet til det ønskede histogrammet.

d)

Vis hvorfor parametrene $a = \frac{\sigma_T}{\sigma}, b = \mu_T - a\mu$ gir oss en gråtonetransformasjon som vil transformere et bilde med middelverdi μ og varians σ^2 til et bilde med ønsket middelverdi μ_T og varians σ_T^2.

Du kan her bruke at variansen kan uttrykkes ved

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{G-1} i^2 p(i) - (\sum_{i=0}^{G-1} ip(i))^2.$$

Forholdet mellom den nye middelverdien μ_T og den orginale middelverien μ kan regnes ut fra

$$\mu_T = \sum_{i=0}^{G-1} T[i]p(i) = a\mu + b.$$

Finn uttrykket for forholdet mellom variansen σ^2 og σ_T^2.

For å vise forholdet mellom variansen σ^2 og σ_T^2 begynner vi på samme måte som i eksempelet for middelverdien, hvor vi setter inn transformasjonen $T[i]$ inn i ligningne.

Vi får da:

$$\begin{aligned}
\sigma_T^2 &= \sum_{i=0}^{G-1} T[i]^2 p(i) - (\sum_{i=0}^{G-1} T[i]p(i))^2 \\
&= \sum_{i=0}^{G-1} (ai+b)^2 p(i) - (\sum_{i=0}^{G-1} (ai+b)p(i))^2 \\
&= \sum_{i=0}^{G-1} (a^2i^2 + 2aib + b^2)p(i) - (a\sum_{i=0}^{G-1} ip(i) + b\sum_{i=0}^{G-1} p(i))^2 \\
&= a^2\sum_{i=0}^{G-1} i^2p(i) + 2ab\sum_{i=0}^{G-1} ip(i) + b^2\sum_{i=0}^{G-1} p(i) - a^2(\sum_{i=0}^{G-1} ip(i))^2 \\
&- 2ab\sum_{i=0}^{G-1} ip(i)\sum_{i=0}^{G-1} p(i) - b^2(\sum_{i=0}^{G-1} p(i))^2
\end{aligned}$$

NB! Husk at $\sum_{i=0}^{G-1} p(i) = 1$

$$\begin{aligned}
\sigma_T^2 &= a^2\sum_{i=0}^{G-1} i^2p(i) + 2ab\sum_{i=0}^{G-1} ip(i) + b^2 - a^2(\sum_{i=0}^{G-1} ip(i))^2 - 2ab\sum_{i=0}^{G-1} ip(i) - b^2 \\
&= a^2\sum_{i=0}^{G-1} i^2p(i) - a^2(\sum_{i=0}^{G-1} ip(i))^2 \\
&= a^2(\sum_{i=0}^{G-1} i^2p(i) - (\sum_{i=0}^{G-1} ip(i))^2) \\
&= a^2\sigma^2
\end{aligned}$$

Altså har vi kommet frem til det alternative uttrykket vi har for varians, og vi får at

$$\sigma_T^2 = a^2\sigma^2.$$

Altså har vi at $a = \frac{\sigma_T}{\sigma}, b = \mu_T - a\mu$.

Oppgave 4 : Konvolusjon

La intensiteten omkring pikselposisjonen (x, y) være modellert som kvadratisk i x-retningen men lineær i y-retningen:

$$f(x, y) = k_1 + k_2 x + k_3 y + k_4 x^2.$$

I et lokalt 3x3 område rundt posisjonen (x, y) vil da intensitetene være:

$k_1 - k_2 - k_3 + k_4$	$k_1 - k_3$	$k_1 + k_2 - k_3 + k_4$
$k_1 - k_2 + k_4$	k_1	$k_1 + k_2 + k_4$
$k_1 - k_2 + k_3 + k_4$	$k_1 + k_3$	$k_1 + k_2 + k_3 + k_4$

a)

Vis at filtermasken

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -6 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

gir et skalert estimat av den korrekte Laplace-verdien av denne modellen.

Svar: Den korrekte lokale Laplace-verdien av denne modellen er gitt ved (ligningen er ikke gitt i oppgaven, men dette bør kandidatene beherske):

$$-\bigtriangledown^2 (f(x, y)) = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y^2} = -2k_4$$

Den gitte filtermasken gir $4k_4$, som altså er et skalert estimat.

b)

Forklar hvordan vi kan gjøre Laplace-estimatet som vi får med dette filteret robust for støy, og vis hvordan filtermasken ovenfor eventuelt blir modifisert. Hva kaller vi et slikt filter?

Svar: Vi kan konvolvere inn-bildet med et lavpassfilter før vi estimerer Laplace-verdien med den samme filtermasken som ovenfor. Eller vi kan utnytte kommutativitets-egenskapen til konvolusjonsoperasjonen, og konvolvere filtermasken med lavpassfilteret, og så anvende resultatet som et filter på bildet. F. eks. LoG-filteret:

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -6 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & -14 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

c)

Vis at du kan lage et 5x5 LoG-lignende filter ved hjelp av DoG ("Difference of Gaussians") ved å bruke to enkle tilnærminger til en 2D Gauss-profil med forskjellig størrelse.

Svar: Her er det mest naturlig å bruke en 5x5 og en 3x3 tilnærming til Gauss-profilen, null-utvide og skalere den sistnevnte, og få følgende filter:

$$\mathrm{DoG} = \frac{1}{256}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} - \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{256}\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 4 & 1\\ 4 & 0 & -8 & 0 & 4\\ 6 & -8 & -28 & -8 & 6\\ 4 & 0 & -8 & 0 & 4\\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

d)

Forklar hva vi mener med at et 2D filter er "separabelt", og vis hvordan dette DoG-filteret kan gjøres separabelt.

Svar: Et filter er separabelt hvis filtreringen kan utføres som to sekvensielle filtreringer, eller hvis vi bruker assosiativitets-egenskapen ved konvolusjon (f*h=(f*h1)*h2, hvis h=(h1*h2)). Selve DoG-filteret er ikke separabelt, men hver av komponentene som ble brukt til å produsere det, kan separeres. Dette bør kunne besvares selv om man ikke har fått resultatet ovenfor riktig.

$$\mathrm{DoG} = \frac{1}{256}\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 6\\ 4\\ 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 4 & 1\end{bmatrix} - \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Oppgave 5 : Canny's kantdetektor

Canny's algoritme betraktes som en kantdetektor som er (nær) optimal i forhold til følgende tre kriterier:

1. Best mulig deteksjon (alle kanter og bare kanter)
2. God kant-lokalisering
3. Én enkelt respons for hvert kant-piksel

a)

Beskriv hovedpunktene i Canny's kantdeteksjonsalgoritme.

1. Lavpassfiltrér bildet $f(x, y)$ med et Gauss-filter (med gitt s).
2. Finn gradient-magnituden $g(x, y)$ og gradient-retningen θ_g.
3. Tynning av gradient-magnitude ortogonalt på kantene i bildet
   - F.eks.: Hvis en piksel i gradient-magnitude-bildet har en 8-nabo i eller mot gradient-retningen med høyere verdi, så settes pikselverdien til 0.
4. Hysterese-terskling (to terskler, T_h og T_l):
   - Merk alle piksler der $g(x, y) >= T_h$
   - For alle piksler der $g(x, y) \in [T_l, T_h)$:
     - Hvis (4 eller 8)-nabo til en merket piksel, så merkes denne pikselen også.
   - Gjenta fra trinn b til konvergens.

b)

Hva oppnår vi med følgende konvolusjonsmasker:

$$h_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, h_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, h_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h_4 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, h_5 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, h_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, h_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

for retningene $\theta_k = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, k = 0, ..., 7$, NB! Riktig er: $\theta_k = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{4}, k = 0, ..., 7$, og operatoren $G(x, y) = \max_{k=0,...,7}\{|g_k(x, y)|\}$, der $g_k(x, y) = f(x, y) * h_k$?

Svar: Dette er en 8-retnings "kompass-operator" basert på Sobel-operatoren, produsert ved sirkulær rotasjon mot urviseren. For hvert piksel i bildet finner operatoren et gradient-estimat i den 8-retningen der absoluttverdien av den lokale gradient-magnituden er størst.

c)

Hvilket av trinnene i Canny-algoritmen kan denne operatoren erstatte?
Hvilke matematiske operasjoner unngår vi med dette? Svar: Den kan erstatte beregning av gradient-magnitude og gradient-retning ved hjelp av Sobel-operatoren (som består av h1 og h2, og erstatter kvadrering-sum-kvadratrot og arctg med en simpel max(operator). Vi slipper også avrunding av resultatet av arctg til nærmeste 45 grader, og får et retningsbilde med verdier fra 0 til 7.

d)

Trenger vi alle 8 filtermaskene i b) hvis formålet er å erstatte ett av trinnene i Canny-algoritmen?

Svar: Nei, fire av resultatene finnes ved å invertere resultatet fra de fire andre (motsatte retninger).

Takk for oppmerksomheten!