## 4.1.1 b)

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} - 4x_n = 0$$

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$x_n = C\,4^n + D(-1)^n$$

## 4.1.5 b)

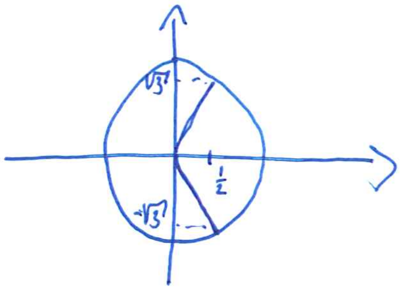
$$x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0 \qquad x_0 = 2,\ x_1 = 1$$

$$r^2 - r + 1 = 1$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{3}\,i}{2} \end{cases}$$

$$\rho = \left| \frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2} \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$\frac{1}{2} = \rho \cos\theta \implies \theta = \frac{\pi}{3}$$




Det gir

$$r = e^{\frac{\pi}{3} i}$$

$$\bar{r} = e^{-\frac{\pi}{3} i}$$

$$x_n = C \cdot (1)^n \cos(n\theta) + D\,(1)^n \sin(n\theta)$$

$$= C \cos\left(\frac{\pi}{3} n\right) + D \sin\left(\frac{\pi}{3} n\right)$$

4.1.5 b) Fortsettelse

$$x_0 = C\cos(0) + D\sin(0) = C = 2$$

$$x_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + D\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$2\,\cancel{\cos}\,\frac{1}{2} + D\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$D\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$D = 0$$

$$x_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

# 4.2.5 b)

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 9n \qquad x_0 = x_1 = 3$$

Homogen løsning:

$$r^2 - 6r + 8 = 0$$

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1 = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$x_n^h = C\,4^n + D\,2^n$$

Partikulær løsning:

Prøver med polynom av grad 1.

$$x_n^p = An + B$$

$$x_{n+2}^p - 6x_{n+1}^p + 8x_n^p = A(n+2) + B - 6A(n+1) - 6B + 8An + 8B$$

$$= 3An - 4A + 3B = 9n$$

Det gir

$$3A = 9 \quad \Rightarrow \quad A = 3$$

$$-4A + 3B = 0 \qquad B = 4$$

$$x_n^p = 3n + 4$$

4.2.5b) fortsettelse

Generell løsning:

$$x_n = x_n^h + x_n^p$$
$$= C4^n + D2^n + 3n + 4$$

$x_0 = x_1 = 3$

$x_0 = 3 = C + D + 4 \iff C + D = -1$

$x_1 = 3 = 4C + 2D + 7 \iff 2C + D = -2$

$C = -1 \qquad D = 0$

$$x_n = (-1)\cdot 4^n + 3n + 4$$

4.1.15 Bieformering

Ubefruktet egg $\Rightarrow$ Hann (M)
Befruktet egg $\Rightarrow$ Hunn (K)

$x_n$ - Antall forgjengere ~~[illegible]~~ n generasjoner tilbake

Forklar hvorfor

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

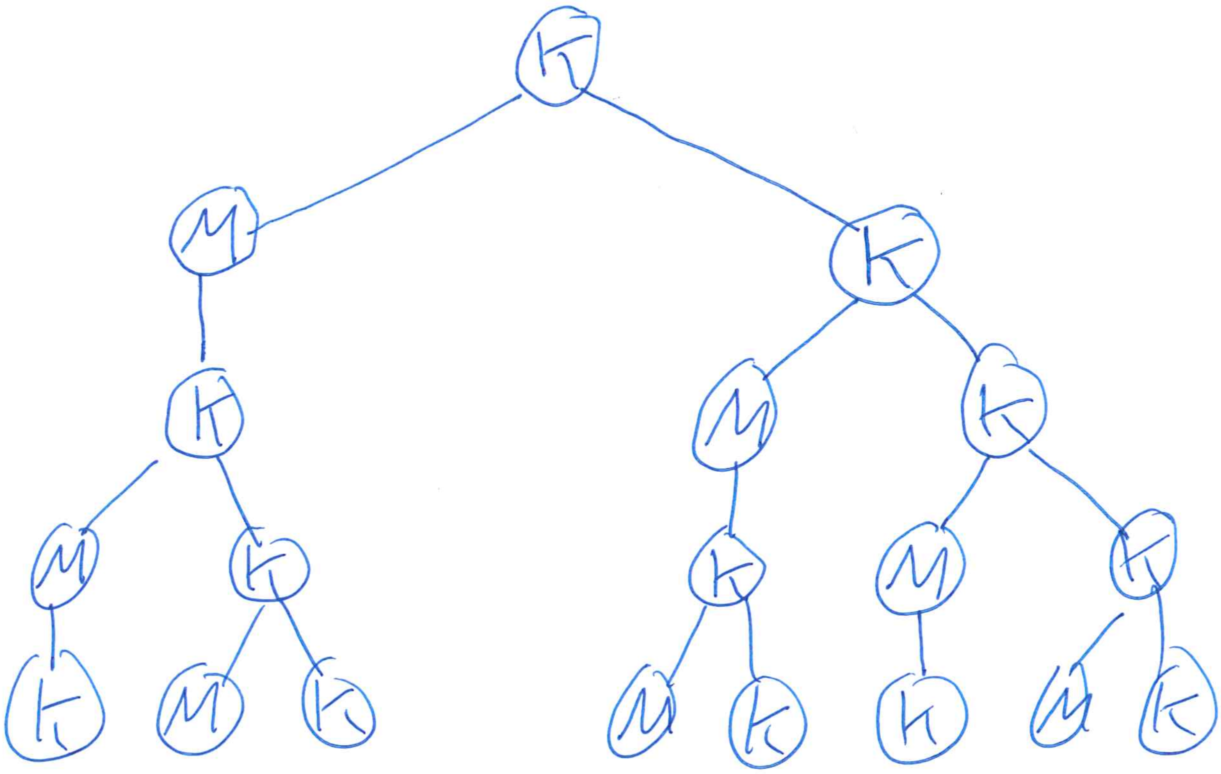
Ser først på eks

n=1

n=2

n=3

n=4



4.1.15 p.2

Observerer:

Hver bie i generasjon $n-1$ har nøyaktig en bie som mor fra generasjon $n$. Antall hunnbier i generasjon $n$ er derfor $x_{n-1}$.

Videre er antall hannbier etter $n$ generasjoner lik antall hunnbier i generasjon $n-1$.

I generasjon $n-1$ er det $x_{n-2}$ hunnbier.

Altså er antall bier i generasjon $n$ lik

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Hvor mange forfedre har en hunn $n$ generasjoner tilbake

Løser

$$x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_n = C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + D_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

For en hunnbie får vi initialbetingelser

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$

Det gir

4.1.15 p. 3

$$2 = x_1 = C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + D_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$3 = x_2 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Mellom regning:

$$(1 \pm \sqrt{5})^2 = 1 \pm 2\sqrt{5} + 5 = 2(3 \pm \sqrt{5})$$

Det gir

$$C(1+\sqrt{5}) + D(1-\sqrt{5}) = 4 \qquad \text{I}$$

$$C(3+\sqrt{5}) + D(3-\sqrt{5}) = 6 \qquad \text{II}$$

$$\text{II} - \text{I} \Rightarrow 2C + 2D = 2$$

$$\Rightarrow D = 1 - C$$

Setter dette inn i I og får

$$\sqrt{5}(2C-1) = 3$$

$$\Rightarrow C = \frac{3}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{5}+5}{10} = \frac{\sqrt{5}}{10}(3+\sqrt{5})$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{10}\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})^2 = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Regner ut D på tilsvarende måte

$$D = 1 - C = 1 - \left(\frac{3}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

4.2.18

Du har vunnet 10 millioner

Høyrente konto gir 6% rente

Årlig inflasjon 2%

Du tar ut $a$ kroner det første året, $1{,}02a$ kroner det neste osv.

$x_n$ - Antall millioner på konto etter $n$ år

a) Vis at

$$x_{n+1} = 1{,}06\, x_n - (1{,}02)^n a \qquad x_0 = 10$$

(Tar ut pengene ved slutten av året.)

Etter det ~~...~~ $n$'te året tar vi ut $(1{,}02)^n a$ krone

Ved år $n+1$ får vi $1{,}06\, x_n$ som følge av rente inntekter

Det gir

$$x_{n+1} = 1{,}06\, x_n - (1{,}02)^n a$$

b) Velg $a$ slik at utbetalingene varer evig.

Homogen løsning

$x_{n+1} - 1{,}06\, x_n = 0 \Rightarrow r - 1{,}06 = 0 \Leftrightarrow r = 1{,}06$

$$x_n^h = (1{,}06)^n C$$

Partikulær løsning:

Prøver med $x_n^p = D\,(1{,}02)^n$

$\cancel{(1{,}02)^{n+1} D + (1{,}02)^n D = 1{,}02^n a}$

$\cancel{0{,}02 D = a}$

$\cancel{D = \frac{a}{0{,}02}} =$

$D\,(1{,}02)^{n+1} - 1{,}06\,(1{,}02)^n D = -a(1{,}02)^n$

$(1{,}02) D - 1{,}06 D = -a$

$-0{,}04 D = -a$

$D = 25a$

$x_n^p = 25a\,(1{,}02)^n$

Gennerell løsning:

$$x_n = x_n^h + x_n^p = (1{,}06)^n C + 25a\,(1{,}02)^n$$

Bruker initialbetingelsen

$$x_0 = 10 = C + 25a \iff C = 10 - 25a$$

$$\underline{x_n = (10-25a)(1{,}06)^n + 25a\,(1{,}02)^n}$$

Når $n \to \infty$ vil $(10-25a)(1{,}06)^n$ dominere.
Vi må derfor velge $10 - 25a > 0 \iff a < 0{,}4$
Vi må derfor ikke ta ut mer en 400 000 det første året for at pengene skal vare evig.

c) Ønsker kontoen tom etter 80 år

$x_{80} = 0$

$$x_{80} = 0 = (10-25a)(1{,}06)^{80} + 25a\,(1{,}02)^{80}$$

$$25a\left((1{,}06)^{80} - (1{,}02)^{80}\right) = 10 \times (1{,}06)^{80}$$

$$a = \frac{2\,(1{,}06)^{80}}{5\left((1{,}06)^{80} - (1{,}02)^{80}\right)} = 0{,}4193$$

$\Rightarrow$ Vi kan ta ut 419300kr første året hvis pengene skal vare i 80 år.