MAT 1001, Høsten 2010

Oblig 1

Innleveringsfrist: Torsdag 23. september kl. 1430

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1001). Oppgaven leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen. Det kreves 50% riktig for å bestå og at det gjøres et forsøk på alle punkter. Ved rettingen gis hvert delspørsmål 0-10 poeng, dvs. maks poengsum 70. Grensen for å få godkjent er altså 35 poeng.

Oppgave 1. I Langåra Roklubb var det våren 2010 ett hundre nybegynnere. Klubben disponerer tre typer båter; singlesculler, dobbeltsculler og firer med styrmann (cox). Coxene som blir brukt på treningene er ikke nybegynnere, men erfarne roere som gir instruksjon til nybegynnerene. Vi teller ikke med disse coxene. Det er således henholdsvis 1,2 eller 4 roere i båtene. Vi kaller heretter båtene for enere, toere og firere.

På første trening blir alle de 100 roerene plassert i firere. Etterhvert får fler og fler lov til å prøve seg på mindre båter, som krever bedre balanse. Men de blir også med jevne mellomrum flyttet tilbake i større båter for å beherske alle båttyper og få mer instruksjon.

La x_n , y_n og z_n betegne antall roere som ror henholdsvis ener, toer eller firer på trening nummer n. Det er altså gitt at $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ og $z_1 = 100$. Roklubben innfører så følgende system ; av de som ror enere på en trening, skal 40% også ro ener på neste trening mens 24% skal ro toer og 36% skal ro firer. Av de som ror toer skal 20% ro ener, 44% ro toer og 36% ro firer. Av de som ror firer, skal 24% ro toer og 76% ro firer.

Vi skal studere hvordan dette systemet utvikler seg over tid. Vi regner eksakt matematisk og da blir mange av tallene ikke heltallige. Vi bryr oss ikke om det. (Men roklubben må selvfølgelig best mulig tilpasse slik at alle tall er hele og passer med antall plasser i båtene.) Vi lar u_n betegne tilstandsvektoren ved trening nr. n, dvs:

$$u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Dynamikken i problemet er beskrevet av en overgangsmatrise M gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,24 & 0,44 & 0,24 \\ 0,36 & 0,36 & 0,76 \end{pmatrix}$$

a) Gi en forklaring, ved figur eller på annen måte, at M er overgangsmatrisen i dette problemet, dvs. at $u_{n+1} = Mu_n$.
b) Finn ut hvor mange roere som satt i hver båttype ved annen og tredje trening. (Rund av til nærmeste heltall.)
c) Finn den karakteristiske ligningen til matrisen M. Sjekk svaret ditt ved å sjekke at røttene er $0,2$ og $0,4$ og 1.

d) Finn egenvektorene til M for de forskjellige egenverdiene.
e) Finn formler for x_n, y_n og z_n. Hvilken grense vil dette nærme seg når n går mot uendelig ?

Oppgave 2. Vi ser på det linære ligningssystemet :

$$x + 2y + az = 1 \tag{1}$$
$$ax - y + 3z = 4 \tag{2}$$
$$2x + 5y = 7 \tag{3}$$

a) Beregn determinanten til koeffisientmatrisen.
b) For hvilke verdier av a har systemet ingen, en eller uendelig mange løsninger ?