Fasit til utvalgte oppgaver MAT1100, uka 6-10/9

Øyvind Ryan (oyvindry@ifi.uio.no)

September 9, 2010

Oppgave 1.5.8

Hvis $P(x)$ er delelig med $x - a$, så kan vi skrive $P(x) = (x - a)P_1(x)$. Hvis $P(x)$ også er delelig med $x - b$ så må jo $P(b) = 0$. Men da er det klart at også $P_1(b) = 0$, siden $b - a \neq 0$. Men da følger det fra Setning 1.5.5 at P_1 er delelig med $x - b$ også, slik at vi kan skrive $P_1(x) = (x - b)P_2(x)$, og vi har derfor

$$P(x) = (x - a)P_1(x) = (x - a)(x - b)P_2(x),$$

slik at P også er delelig med $(x - a)(x - b)$.

Oppgave 3.1.10

Anta at $z = z_1 + iz_2$ og $w = w_1 + iw_2$ er slik at både $z + w$ og zw er reelle. At

$$z + w = z_1 + iz_2 + w_1 + iw_2 = z_1 + w_1 + i(z_2 + w_2)$$

er reell betyr at imaginærdelen er 0, det vil si at $z_2 + w_2 = 0$, som betyr at $w_2 = -z_2$.

At zw er reell betyr at

$$zw = (z_1 + iz_2)(w_1 + iw_2) = z_1w_1 - z_2w_2 + i(w_1z_2 + w_2z_1)$$

er reell, som på samme måte bare kan skje hvis $w_1z_2 + w_2z_1 = 0$.

Vi har nå brutt ned problemet vårt til å finne alle reelle løsninger av

$$\begin{aligned} w_2 &= -z_2 \\ w_1z_2 &= -w_2z_1. \end{aligned}$$

En løsning av disse er opplagt, nemlig at $z_2 = w_2 = 0$, som svarer til at både z og w er reelle. Hvis $z_2 \neq 0$ blir den unike løsningen av likningene

$$\begin{aligned} w_2 &= -z_2 \\ w_1 &= -\frac{w_2z_1}{z_2} = -\frac{w_2z_1}{-w_2} = z_1, \end{aligned}$$

som uttrykker at z og w må være konjugerte av hverandre.

Oppgave 3.2.13

a)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
zw &= (1+i\sqrt{3})(1+i) = 1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1) = 1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1) \\
\frac{z}{w} &= \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{1+1} \\
&= \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}.
\end{aligned}$$

b)

For z har vi $r=\sqrt{1+3}=2$, og $\cos\theta=\frac{1}{2}, \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, som gir $\theta=\frac{\pi}{3}$.
For w har vi $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, og $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, som gir $\theta=\frac{\pi}{4}$.

c)

Fra b) ser vi at $\frac{z}{w}$ har polarform $r=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, og $\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$. Vi har dermed

$$\frac{z}{w}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Sammenligner vi realdelene og imaginærdelene ser vi at

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\
\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}-1}{2},
\end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Oppgave 3.2.14

Vi har at

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\overline{z+w} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\
&= z\bar{z}+z\bar{w}+w\bar{z}+w\bar{w} \\
&= |z|^2+|w|^2+\bar{z}w+\overline{\bar{z}w} \\
&= |z|^2+|w|^2+2\Re(\bar{z}w) \\
&= |z|^2+|w|^2.
\end{aligned}$$

Geometrisk betyr $\Re(\bar{z}w) = 0$ at vinklene z og w står vinkelrett på hverandre: Hvis argumentet til z er θ og argumentet til w er ϕ, så blir jo argumentet til $\bar{z}w$ lik $\phi - \theta$ (siden argumentet til $\bar{z}$ er $-\theta$), og $\bar{z}w$ har null i realdel hvis argumentet er $\pm\frac{\pi}{2}$, som skjer bare hvis θ og ϕ skiller seg med $\frac{\pi}{2}$, det vil si at z og w står vinkelrett på hverandre. Men da danner $z, w, z+w$ sidene i en rettvinklet trekant, og det vi har vist er da ikke noe annet enn Pythagoras læresetning.

Oppgave 3.2.16

a)

Vi har at

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)(\overline{z+1}}{(z+1)\overline{z+1}} = \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{|z+1|^2} = \frac{z\overline{z}+z-\overline{z}-1}{|z+1|^2} = \frac{z-\overline{z}}{|z+1|^2}$$

der vi har brukt at $z\overline{z} = |z|^2 = 1$. Dette tallet er rent imaginært, siden $z - \overline{z}$ er det (realdelene kansellerer hverandre.

b)

0, $z-1$, og $z+1$ ligger alle på en sirkel med sentrum i z med radius 1 (0 ligger på denne sirkelen siden $|z| = 1$). $z-1$ og $z+1$ ligger også på samme diameter i sirkelen, og det at $\frac{z-1}{z+1}$ er rent imaginær betyr at vektorene $z-1$ og $z+1$ i planet står vinkelrett på hverandre, siden hvis a har vinkel θ og b har vinkel ϕ, så har $\frac{a}{b}$ vinkel $\theta - \phi$, og $\frac{a}{b}$ er rent imaginær hvis og bare hvis $\theta - \phi$ er 90 grader. Med andre ord, i en trekant innskrevet i en sirkel der to av hjørnene ligger på diameteren, så vil vinkelen i det tredje hjørnet være 90 grader.

Oppgave 3.2.18

a)

$1+ti$ og $1-ti$ har samme modulus ($\sqrt{1+t^2}$), og hvis argumentet til $1+ti$ er ϕ, så blir argumentet til $1-ti$ lik $-\phi$. Men da har $\frac{1+ti}{1-ti}$ modulus lik 1 og argument lik $\theta = 2\phi$. For alle t ligger dermed punktene på sirkelen om origo med radius 1, som var det vi skulle vise.

b)

Fra a) vet vi at argumentet til $\frac{1+ti}{1-ti}$ er $\theta = 2\phi$, der ϕ er argumentet til $1+ti$. Sistnevnte er løsningen på $\tan\phi = t$, slik at $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = t$.

Oppgave 3.2.21

Fra trekantulikheten kan vi skrive

$$\begin{aligned} |z| &= |z-w+w| \le |z-w| + |w| \\ |w| &= |w-z+z| \le |w-z| + |z| = |z-w| + |z|, \end{aligned}$$

som også kan skrives

$$\begin{aligned}|z|-|w| &\leq |z-w|\\ |w|-|z| &\leq |w-z| = |z-w|.\end{aligned}$$

Siden en av de to venstresidene her er lik $||z|-|w||$, så kan vi konkludere med at $||z|-|w|| \leq |z-w|$.

Oppgave 3.3.8

Vi skal regne ut $(1+i)^804$ og $(3-i)^173$ ved hjelp av de Moivres formel. Da $1+i$ har modulus $\sqrt{2}$ og argument π får vi

$$\begin{aligned}(1+i)^804 &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{804}\\ &= \sqrt{2}^{804}\left(\cos\left(\frac{804\pi}{4}\right) i\sin\left(\frac{804\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sqrt{2}^{2\times 402}\left(\cos\left(201\pi\right) i\sin\left(201\pi\right)\right)\\ &= 2^{402}\left(\cos\left(200\pi+\pi\right) i\sin\left(200\pi+\pi\right)\right)\\ &= 2^{402}\left(\cos\left(\pi\right) i\sin\left(\pi\right)\right)\\ &= -2^{402}.\end{aligned}$$

$\sqrt{3}-i$ har modulus 2 og argument $-\frac{\pi}{6}$, og vi får dermed også

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}-i)^173 &= \left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^{173}\\ &= 2^{173}\left(\cos\left(-\frac{173\pi}{6}\right) i\sin\left(-\frac{173\pi}{6}\right)\right)\\ &= 2^{173}\left(\cos\left(28\pi+\frac{5\pi}{6}\right) i\sin\left(28\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\right)\\ &= 2^{173}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\\ &= 2^{173}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\\ &= -2^{172}(\sqrt{3}+i).\end{aligned}$$

Oppgave 3.3.9

Vi har at

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n &= \left(\frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)^n \\
&= \left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n \\
&= \left(\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}\right)^n = \frac{\left(e^{i\theta}\right)^n}{\left(e^{-i\theta}\right)^n} \\
&= \frac{e^{in\theta}}{e^{-in\theta}} = \frac{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)-i\sin(n\theta)} \\
&= \frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}.
\end{aligned}$$

Oppgave 3.3.10

Vi har først bruk for at formlene

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \cos\theta+i\sin\theta \\
e^{-i\theta} &= \cos\theta-i\sin\theta,
\end{aligned}$$

som jo gjelder for reelle θ, også gjelder for komplekse z, det vil si

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \cos z+i\sin z \\
e^{-iz} &= \cos z-i\sin z.
\end{aligned}$$

Disse vises ved at vi først regner ut $\cos z+i\sin z$ ved hjelp av definisjonene

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\
\sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}
\end{aligned}$$

fra Seksjon 3.3 (e^{-iz}-leddene vil da kansellere), deretter regner vi ut $\cos z-i\sin z$ på samme måte (e^{iz}-leddene vil da kansellere). Vi får nå

$$\begin{aligned}
\sin(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2i} = \frac{e^{iz}e^{iw}-e^{-iz}e^{-iw}}{2i} \\
&= \frac{(\cos z+i\sin z)(\cos w+i\sin w)-(\cos z-i\sin z)(\cos w-i\sin w)}{2i} \\
&= \frac{2i(\cos z\sin w+\sin z\cos w)}{2i} = \sin z\cos w+\cos z\sin w,
\end{aligned}$$

der halvparten av leddene i telleren kansellerte. På samme måte får vi at

$$\begin{aligned}
\cos(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2} \\
&= \frac{(\cos z + i\sin z)(\cos w + i\sin w) + (\cos z - i\sin z)(\cos w - i\sin w)}{2} \\
&= \frac{2(\cos z\cos w - \sin z\sin w)}{2} = \cos z\cos w - \sin z\sin w.
\end{aligned}$$

Oppgave 3.3.12

a)

Formelen $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ kan bevises ved induksjon på nøyaktig samme måte som for reelle tall. Formelen er opplagt sann for $n = 0$. Hvis vi har vist den for $0, 1, \dots, n$, så får vi for $n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} z^k &= \sum_{k=0}^{n} z^k + z^{n+1} = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} + z^{n+1} \\
&= \frac{z^{n+1}-1}{z-1} + \frac{z^{n+2}-z^{n+1}}{z-1} \\
&= \frac{z^{n+1}-1+z^{n+2}-z^{n+1}}{z-1} = \frac{z^{n+2}-1}{z-1},
\end{aligned}$$

som viser at formelen holder også for $n+1$. Dermed holder formelen for alle n.

b)

Setter vi inn $z = e^{ik\theta}$ i formelen fra a) får vi først at $z^k = e^{ik\theta}$, og deretter

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1},$$

som var det vi skulle vise.

c)

Høyresiden fra svaret i b) kan omskrives slik:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} &= \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \frac{e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \\
&= e^{in\theta/2} \frac{\frac{e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}}{2i}}{\frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{2i}} \\
&= e^{in\theta/2} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},
\end{aligned}$$

som er det uttrykket vi skulle frem til. Vi har her brukt formlene for cosinus og sinus uttrykt ved hjelp av eksponentialfunksjoner.

d)

Setter vi opp realdel og imaginærdel i uttrykket i c) får vi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \sum_{k=0}^{n}(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) + i\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta) \\
&= \left(\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right) + i\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Sammenligner vi realdelene og imaginærdelene i disse uttrykkene får vi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) &= \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta) &= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.