MAT 1100: Obligatorisk oppgave 1, H-10

Innlevering: *Senest fredag 23. september, 2010, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Du kan skrive for hånd eller med datamaskin, men besvarelsen skal uansett leveres på papir. Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.*

Obligen skal leveres med en egen forside som du finner på
`www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1110/v10/obliger.xml`

(det vil også være papirkopier av forsiden tilgjengelig ved innlevering). På samme side finner du regelverket for obliger ved Matematisk institutt. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no før innleveringsfristen dersom du blir syk!

Instruksjoner:
Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score (vekten til hver oppgave står på), og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Alle svar skal begrunnes. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som gjennom besvarelsen viser at de har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg og gjenspeile din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Alle oppgavene vektes likt: 20%.

Oppgave 1. La

$$z = \frac{i}{1+\sqrt{3}i}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

(**a**) Skriv z på formen $z = a + bi$ og så på polarform $z = re^{i\theta}$.
(**b**) Finn alle tredjerøttene til z (dvs. alle w s.a. $w^3 = z$).

Oppgave 2. La

$$P(z) = z^4 - 3z^3 + 5z^2 - z - 10.$$

(**a**) Vis at $z = 1 - 2i$ ($i = \sqrt{-1}$) er en rot i P.
(**b**) Finn alle røttene i P.
(**c**) Skriv P som et produkt av (komplekse) førstegradspolynomer, og av reelle første og andregradspolynomer.

Oppgave 3. Definér en følge ved at

(1) $$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}.$$

(**a**) Regn ut a_2, a_3 og a_4.
(**b**) Bruk induksjon til å vise at $a_n \geq 0$ for alle n.
(**c**) Vis at $a_n^2 - 2 \geq 0$ for alle n.
(**d**) Vis at $a_{n+1} \leq a_n$ for alle n. (Du trenger ikke bruke induksjon her, men punkt **b** over.)
(**e**) Forklar hvorfor rekka konvergerer, og finn $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Oppgave 4. Gitt $f : [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}] \to [-1, 1]$ definert ved

$$f(x) = \sin\left(x^2\right).$$

(**a**) Vis at f er kontinuerlig for alle $a \in [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$.
(**b**) Finn en δ slik at $|x - y| \leq \delta$ impliserer at $|f(x) - f(y)| \leq 0.1$ **for alle** x og y i $[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$

Oppgave 5. La

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Vis at f *ikke* er kontinuerlig i $x = 0$.