MAT1100 - Grublegruppe
Fasit 1

Jørgen O. Lye

Formel for en linje

Gitt 2 komplekse tall z_1 og z_2 påsto jeg at linjen mellom dem kan parametriseres med

$$L(t) = tz_1 + (1-t)z_2$$

Argument via vektorer

Hvis z_1 og z_2 tenkes på som vektorer i planet så er $z_1 - z_2$ vektoren imellom dem. $t(z_1 - z_2)$ er en vektor parallell med $z_1 - z_2$ for alle t.

Vektoren $L(t) = tz_1 + (1-t)z_2 = z_2 + t(z_1 - z_2)$ er dermed en vektor som starter i z_2 og peker langs $z_1 - z_2$. Hvis man varierer t tegner man derfor opp linjen mellom z_1 og z_2.

Argument via stigningstall til en graf

Husk at dersom stigningstallet ikke er ∞ kan man skrive en linje i planet som en graf ved

$$y(x) = ax + b$$

Siden denne linjen skal gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) har vi ligningene

$$y_1 = y(x_1) = ax_1 + b$$

og

$$y_2 = y(x_2) = ax_2 + b$$

Fra disse finner man

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

og

$$b = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

Slik at et punkt (x, y) ligger på linjen mellom (x_1, y_1) og (x_2, y_2) kan skrives som at

$$y = ax + b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}$$

Eller (hvis man ganger med $(x_2 - x_1)$)

$$y(x_2 - x_1) - x(y_2 - y_1) = (y_1x_2 - y_2x_1) \tag{1}$$

Hvis man ser på formelen for $L(t)$ sier den at

$$x(t) = tx_1 + (1 - t)x_2 = t(x_1 - x_2) + x_2$$

og

$$y(t) = ty_1 + (1 - t)y_2 = t(y_1 - y_2) + y_2$$

Setter man disse 2 inn for x og y i ligning (1) ser man at denne er oppfylt:

$$(t(y_1 - y_2) + y_2)(x_2 - x_1) - (t(x_1 - x_2) + x_2)(y_2 - y_1) =$$

$$t(y_1 - y_2)(x_2 - x_1) - t(x_1 - x_2)(y_2 - y_1) + y_2(x_2 - x_1) - x_2(y_2 - y_1)$$

$$= y_2(x_2 - x_1) - x_2(y_2 - y_1) = y_2x_2 - y_2x_1 - x_2y_2 + x_2y_1 = y_1x_2 - y_2x_1$$

Dvs

$$y(x_2 - x_1) - x(y_2 - y_1) = (y_1x_2 - y_2x_1)$$

Dette viser at $x(t)$ og $y(t)$ slik definert over ligger på linjen mellom (x_1, y_1) og (x_2, y_2) for alle t.

Kalkulus 3.2.16

a)

Ganger man oppe og nede i med $(\bar{z} + 1)$ får man

$$\frac{z - 1}{z + 1} \cdot \frac{\bar{z} + 1}{\bar{z} + 1} = \frac{z\bar{z} + z - \bar{z} - 1}{|z|^2 + z + \bar{z} + 1} = \frac{z - \bar{z}}{2 + z + \bar{z}}$$

Hvis $z = x + iy$ så er $z + \bar{z} = x + iy + (x - iy) = 2x = 2\text{Re}(z)$ mens $z - \bar{z} = 2iy = 2i\text{Im}(z)$. Dvs at

$$\frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2iy}{2 + 2x} = \frac{iy}{1 + x}$$

Som åpenbart er rent imaginært.

b)

Siden forholdet er rent imaginært er vinkelen mellom $z+1$ og $z-1$ lik $\pm\frac{\pi}{2}$. Dette kan man tolke som Thales setning.

Kalkulus 3.2.17

a)

Det er 2 måter jeg foreslår. Den raskeste måten er å bruke

$$z = L(t) = tz_1 + (1-t)z_2 = t(z_1 - z_2) + z_2$$

og kreve at t skal være reell. Man løser ligningen over for t:

$$t = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}$$

Denne skal være reell.

Man kunne like godt byttet ut z_1 og z_2 og bruke formelen for linjen mellom dem (da med en annen parameter s).

$$z = L(s) = sz_2 + (1-s)z_1 = s(z_2 - z_1) + z_1$$

slik at

$$s = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Denne skal selvsagt også være reell, slik at tallet $-\frac{s}{t}$ skal være reelt (det er forholdet mellom 2 reelle tall ganget med -1).

$$-\frac{s}{t} = -\frac{\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}{\frac{z-z_2}{z_1-z_2}} = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

Dvs. z er på linjen hvis og bare hvis $\frac{z-z_1}{z-z_2} \in \mathbb{R}$ (eller $z = z_2$).

Den andre måten jeg kommer på å løse denne oppgaven er å skrive $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ og regne litt på $\frac{z-z_1}{z-z_2}$. Man vil da komme frem til at imaginærdelen er 0 hvis og bare hvis

$$y(x_2 - x_1) - x(y_2 - y_1) = (y_1 x_2 - y_2 x_1)$$

Dette viste jeg over at var det samme som at (x, y) er på linjen mellom (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

b)

Midtpunktet mellom z_1 og z_2 er $z_3 = \frac{z_1+z_2}{2}$. At z_1 og z_2 begge skal ligge på sirkelen er uttrykt ved at

$$|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3| = \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$$

Vi kan også skrive at

$$R = \frac{1}{2}|z_1 - z_2| = \frac{1}{2}|(z - z_2) - (z - z_1)|$$

Pass på at du ser hvorfor siste likhet er sann.

Kvadrerer vi begge sider har vi

$$R^2 = \frac{1}{4}|(z - z_2) - (z - z_1)|^2$$

Siden $|z|^2 = z\bar{z}$ kan dette siste skrives som

$$R^2 = \frac{1}{4}\left((z - z_2)\overline{(z - z_2)} - (z - z_2)\overline{(z - z_1)} - \overline{(z - z_2)}(z - z_1) + \overline{(z - z_1)}(z - z_1)\right)$$

Eller

$$R^2 = \frac{1}{4}\left(|z - z_2|^2 - 2\mathrm{Re}\left((z - z_2)\overline{(z - z_1)}\right) + |z - z_1|^2\right)$$

Et punkt z er på sirkelen hvis og bare hvis

$$|z - z_3| = \frac{1}{2}|z_1 - z_2| = R$$

Eller

$$|z - z_3|^2 = R^2$$

Bruker man definisjonen av z_3 finner man

$$\left|z - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\right|^2 = R^2$$

Eller

$$R^2 = \left|\frac{1}{2}(z - z_1) + \frac{1}{2}(z - z_2)\right|^2 = \frac{1}{4}\left|(z - z_1) + (z - z_2)\right|^2$$

Analogt med utregningen over kan dette skrives som at

$$R^2 = \frac{1}{4}\left(|z - z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z - z_1)\overline{(z - z_2)}\right) + |z - z_2|^2\right)$$

z ligger altså på sirkelen hvis og bare hvis

$$\frac{1}{4}\left(|z-z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z-z_1)\overline{(z-z_2)}\right) + |z-z_2|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(|z-z_2|^2 - 2\mathrm{Re}\left((z-z_2)\overline{(z-z_1)}\right) + |z-z_1|^2\right)$$

Dette forenkles til

$$2\mathrm{Re}\left(z-z_1)\overline{(z-z_2)}\right) = -2\mathrm{Re}\left(z-z_1)\overline{(z-z_2)}\right)$$

Som igjen betyr

$$\mathrm{Re}\left(z-z_1)\overline{(z-z_2)}\right) = 0$$

Ganger man med $(z-z_2)$ oppe og nede i uttrykket $(z-z_1)\overline{(z-z_2)}$ får man

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot |z-z_2|^2$$

Realdelen til dette er 0 hvis og bare hvis

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

er rent imaginær.

Dette lengre regnestykket viser at z ligger på sirkelen hvis og bare hvis $\frac{z-z_1}{z-z_2}$ er rent imaginær.

3.2.18

a)

Kall $z = 1 + it$. Da er $w = \frac{z}{\bar{z}}$. Vi kan så regne ut at

$$|w| = \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1$$

siden $|z| = |\bar{z}|$. Dette viser at $|w| = |w - 0|$ er en konstant og dermed har w konstant avstand fra 0 og ligger på sirkelen sentrert i 0 med radius 1 (enhetssirkelen).

b)

Skriv $w = |w|e^{i\theta} = e^{i\theta}$ ($|w| = 1$ fra a)). Skriv også $z = re^{i\phi}$. Da er

$$e^{i\theta} = w = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{re^{i\phi}}{re^{-i\phi}} = e^{2i\phi}$$

Da er

$$\theta + 2\pi n = 2\phi$$

for en eller annen $n \in \mathbb{Z}$. Vi det at $\tan(\phi) = \frac{t}{1}$ slik at

$$t = \tan(\phi) = \tan\left(\frac{\theta + 2\pi n}{2}\right) = \tan\left(\frac{\theta}{2} + n\pi\right)$$

Man kan enten håpe at man er i mål og gjette/anta at $n = 0$. Men det er ikke nødvendig hvis man bruker litt trigonometriske formler:

$$\tan(x + n\pi) = \frac{\sin(x + n\pi)}{\cos(x + n\pi)} = \frac{\sin(x)\cos(n\pi) + \sin(n\pi)\cos(x)}{\cos(x)\cos(n\pi) - \sin(x)\sin(n\pi)}$$

Husk at $\cos(n\pi) = (-1)^n$ og at $\sin(n\pi) = 0$, slik at

$$\tan(x + n\pi) = \frac{(-1)^n \sin(x)}{(-1)^n \cos(x)} = \tan(x)$$

Dvs. at

$$t = \tan\left(\frac{\theta}{2} + n\pi\right) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$