MAT1100 - Grublegruppe
Fasit 2

Jørgen O. Lye

3.3.12

a)

Vi bruker samme triks som for reelle tall:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 \cdots z^n$$

ganger med $(z-1)$ på begge sider her:

$$(z-1)\sum_{k=0}^{n} z^k = z + z^2 + z^3 + \cdots z^{n+1} - 1 - z - z^2 - \cdots - z^n = z^{n+1} - 1$$

Anta som i oppgaven at $z \neq 1$. Da er $z - 1 \neq 0$ og man kan dele på $z - 1$. Dette gir

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

b)

Hvis $\theta \neq 2n\pi$ slik at $e^{i\theta} \neq 1$ kan man bruke formelen over med $z = e^{i\theta}$ og man finner

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$$

c)

Trekker ut en faktor av $e^{i\frac{n+1}{2}\theta}$ i telleren og $e^{i\frac{\theta}{2}}$ i nevneren:

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \cdot \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

Dere har sett at

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

og

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

Trekk den første av disse fra den andre:

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$$

Bruker dette i både nevneren og teller samt at

$$\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} = e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

Finner man at

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

d)

Venstresiden i likheten over kan skrives som

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i\sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Høyresiden er

$$e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Når man krever at realdel skal være lik realdel og imaginærdel skal være lik imaginærdel finner man herfra at

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

3.4.16

$$z^5 + 4z = z(z^4 + 4) = 0$$

Herfra ser man at $z_0 = 0$ er en rot. Ellers er røttene $z^4 = -4 = 4e^{i\pi}$. En fundamentalrot for denne er $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, så får man de andre ved multiplikasjon med $e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$z_2 = iz_1 = i - 1$$

$$z_3 = iz_2 = -1 - i$$

$$z_4 = 1 - i$$

3.4.17

a)

Ganger ligningen med z:

$$z^2 + 1 = 2z\cos\alpha$$

Dette er en annengradsligning man løser på vanlig vis:

$$z = \frac{+2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin\alpha}$$

Her har man brukt hintet!

Siden vi har at

$$z = e^{\pm i\alpha}$$

er

$$|z| = 1$$

b)

Et komplekst tall kan skrives som

$$z = re^{i\theta}$$

Siden $|z| = r = 1$ for tall på enhetssirkelen (per definisjon!) kan man skrive

$$z = e^{i\theta}$$

Regner da ut at

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$$

Cosinus er alltid mellom -1 og 1 (for reelle θ) slik at $2\cos(\theta)$ alltid er mellom -2 og 2.

3.4.19

a)

Ligningen er

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5 = 1$$

En skal altså ha de femte enhetsrøttene til 1, som er w^k for $k = 0, 1, 2, 3, 4$ og $w = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Dvs.

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = w^k$$

Litt algebra så finner man z herfra:

$$1 + z = (1-z)w^k \implies z(1+w^k) = w^k - 1 \implies z = \frac{w^k - 1}{w^k + 1}$$

Dette gir 5 løsninger for $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

b)

Vi starter som før:

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1$$

Kall $v = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, slik at

$$\frac{1+z}{1-z} = v^k$$

for $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Da er resten som i forrige oppgave:

$$z = \frac{v^k - 1}{v^k + 1}$$

hvor vi har nå n løsninger; $k = 0, 1 \cdots n - 1$.

c)

For k og l 2 tall må man vise at forholdet mellom z_k og z_l er reelt. Dvs at

$$\frac{\frac{v^k-1}{v^k+1}}{\frac{v^l-1}{v^l+1}} \in \mathbb{R}$$

Dette er bare en lengre utregning.

$$\frac{\frac{v^k-1}{v^k+1}}{\frac{v^l-1}{v^l+1}} = \frac{(v^k-1)(v^l+1)}{(v^k+1)(v^l-1)}$$

Hvis man ganger oppe og nede med den komplekskonjugerte til nevneren så er uttrykket reelt hvis og bare hvis det man da sitter igjen med som teller er reelt. Telleren jeg snakker om er

$$(v^k-1)(v^l+1)\overline{(v^k+1)(v^l-1)}$$

Siden det er snakk om enhetsrøtter er $\overline{v^k} = v^{-k}$ (sjekk dette!) slik at telleren man skal regne på er

$$(v^k-1)(v^l+1)(v^{-k}+1)(v^{-l}-1) = (v^{k+l}+v^k-v^l-1)(v^{-(k+l)}-v^{-k}+v^{-l}-1)$$

$$= 1-v^l+v^k-v^{k+l}+v^{-l}-1+v^{k-l}-v^k-v^{-k}+v^{l-k}-1+v^l-v^{-(k+l)}+v^{-k}-v^{-l}+1$$

$$= -(v^{k+l}+v^{-(k+l)})+(v^{k-l}+v^{-(k-l)})$$

(Sjekk dette som en konsentrasjonsøvelse!)

Med $v = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ så er svaret over lik

$$-\left(e^{i\frac{2\pi(k+l)}{n}}+e^{-i\frac{2\pi(k+l)}{n}}\right)+\left(e^{i\frac{2\pi(k-l)}{n}}+e^{-i\frac{2\pi(k-l)}{n}}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi(k-l)}{n}\right)-2\cos\left(\frac{2\pi(k+l)}{n}\right)$$

Dette er reelt, slik at

$$\frac{\frac{v^k-1}{v^k+1}}{\frac{v^l-1}{v^l+1}} \in \mathbb{R}$$

Dvs. de forskjellige røttene ligger på en linje!

3.5.15

Metode 1

La $p(z) = z^4 + z^2 + 1$. Se på

$$z^2 p(z) = z^6 + z^4 + z^2 = 1 + z^4 + z^2 = p(z)$$

her har jeg brukt at $z^6 = 1$. Hvis $p(z) \neq 0$ kan man dele på $p(z)$ og få

$$z^2 = 1$$

Dette skulle vi anta at ikke stemte, slik at da er antagelsen om at $p(z) \neq 0$ feil og dermed er $p(z) = 0$.

Metode 2

Siden $z^2 \neq 0$ kan man bruke formelen for geometrisk rekke:

$$p(z) = z^4 + z^2 + 1 = \sum_{k=0}^{2} (z^2)^k = \frac{(z^2)^{2+1} - 1}{z^2 - 1} = \frac{1 - 1}{z^2 - 1} = 0$$

siden $z^6 = 1$.