MAT1100 - Grublegruppe
Oppgavesett 10

Jørgen O. Lye

Kalkulus

9.5.10

Hint: substituer $u \ln(x)$.

9.5.12

Hint: sammenlign med $\frac{1}{x}$.

Oppgaver fra FVLA

1.2.27

c)

Dessverre må man finne u numerisk etter at man har funnet den rette ligningen.

Ekstra del til oppgaven over

Legg til gravitasjon. Dvs. kulen akselererer med $\mathbf{a}_0 = (0, -9.8)$ (målt i m/s^2). Forklar at nå er kulens posisjon som funksjon av tid

$$\mathbf{p}(t) = (20 - 70(t-2)\cos(u), 70(t-2)\sin(u) - \frac{9.8}{2}t^2)$$

Anta Kristoffer Robin *ikke* kunne fysikk, slik at han ikke tok med kulens akselerasjon. Dvs. han bruker vinkelen dere fant i c). Hvor mye lavere treffer han enn han tror?

1.2.28

Fasit til Kalkulus-oppgaver

9.5.10

$u = \ln(x)$, $du = \frac{dx}{x}$.

$$\int 0^{1/2} \frac{dx}{x|\ln(x)|^p} = \int_{-\infty}^{-\ln(2)} \frac{du}{|u|^p}$$

Dette er det samme som

$$\int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{du}{u^p}$$

Tenk litt på hvorfor![1] Vi vet slike integraler konvergerer for $p > 1$ og divergerer for $p \leq 1$.

Det andre integralet blir det samme etter litt substitusjon:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x|\ln(x)|^p} = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{du}{|u|^p} = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{du}{u^p}$$

9.5.12

Integranden kan skrives som

$$\frac{x^2 + x - 2kx^2 - 2k^2}{(x+1)(2x^2 + 2k)}$$

Vi deler denne på $1/x$ og lar $x \to \infty$ for å bruke 9.5.13.(ii).

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1-2k) + x^2 - 2k^2 x}{2x^3 + 2kx + 2x^2 + 2k} = \frac{1-2k}{2}$$

Siste overgang er f.eks. ved å dele på $1/x^3$ oppe og nede. Eller derivere over og under 3 ganger. Uansett sier 9.5.13 at dette integralet også divergerer dersom denne grensen er ikke-null. Så for å ha håp om konvergens må vi ha $\frac{1-2k}{2} = 0 \iff k = \frac{1}{2}$. Vi har ennå ikke vist at vi har konvergens for denne, men det finner vi ut når vi regner ut integralet!

Integralet vi skal regne er

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + x - x^2 - \frac{1}{2}}{(x+1)(2x^2+1)}\, dx$$

[1] Du kan f.eks. substituere $v = -u$.

Vi delbrøksoppspalter

$$\frac{x^2 + x - x^2 - \frac{1}{2}}{(x+1)(2x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{2x^2+1}$$

og finner ved standard maskineri at $A = -\frac{1}{2}$, $B = 1$ og $C = 0$.

$$\int \frac{x^2 + x - x^2 - \frac{1}{2}}{(x+1)(2x^2+1)}\, dx = \int \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{x}{2x^2+1}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{4}\ln(1+2x^2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+2x^2}}{1+x}\right)$$

Setter inn grenser:

$$\int_1^\infty \frac{x^2 + x - x^2 - \frac{1}{2}}{(x+1)(2x^2+1)}\, dx = \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

Her har jeg brukt at

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{1+2x^2}}{1+x}\right) = \ln(2)$$

Dette kan men f.eks. se ved at

$$\frac{\sqrt{1+2x^2}}{1+x} = \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}}{\frac{1}{x}+1}$$

Fasit til FVLA-oppgaver

1.2.27

a)

Ballongen befinner seg ved tiden t ved

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}t$$

hvor $\mathbf{v}$ er hastighetsvektoren

$$\mathbf{v} = \frac{(4,3)}{|(4,3)|} \cdot 5\text{m/s} = \frac{(4,3)}{5} \cdot 5\text{m/s}$$

$$\mathbf{s}(t) = (0,6) + (4,3)t = (4t, 6+3t)$$

b)

Samme type formel som over, men denne gangen skriver vi

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + (t-2)\mathbf{w}$$

da denne formelen skal gjelde for $t \geq 2$. Kulen starter i $(20, 0)$ og har hastighetsvektor

$$\mathbf{w} = -(\cos(u), \sin(u)) \cdot 70$$

Setter vi inne dette får vi

$$\mathbf{p}(t) = (20 - 70(t-2)\cos(u), 70(t-2)\sin(u))$$

c)

Vi skal ha t slik at

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}(t)$$

$$(4t, 6+3t) = (20 - 70(t-2)\cos(u), 70(t-2)\sin(u))$$

Dette gir oss 2 ligninger:

$$4t = 20 - 70(t-2)\cos(u) = 20 + 140\cos(u) - 70t\cos(u)$$

og

$$6 + 3t = 70(t-2)\sin(u) = 70t\sin(u) - 140\sin(u)$$

Fra den første finner man

$$2t(2 + 35\cos(u)) = 20 + 140\cos(u)$$

eller

$$t = \frac{10 + 70\cos(u)}{2 + 35\cos(u)}$$

Setter vi dette inn i ligning 2 finner vi

$$(70\sin(u) - 3)t = 6 + 140\sin(u)$$

$$(70\sin(u) - 3)\frac{10 + 70\cos(u)}{2 + 35\cos(u)} = 6 + 140\sin(u)$$

$$(70\sin(u) - 3)(5 + 35\cos(u)) = (2 + 35\cos(u))(3 + 70\sin(u))$$

$$350\sin(u) - 105\cos(u) - 15 + 70\cdot 35\sin(u)\cos(u) = 105\cos(u) + 140\sin(u) + 35\cdot 70\sin(u)\cos(u) + 6$$

$$490\sin(u) = 21 + 210\cos(u)$$

$$70\sin(u) = 3 + 30\cos(u)$$

Denne kan løses numerisk. Jeg får da $u \approx 0.44$ (radianer).

Ekstra del

Generell formell for posisjon er

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}_0 t^2$$

Dette kan du f.eks. finne ved integrasjon.

Med u fra oppgaven over kan vi finne $t > 0$ slik at Ole Brumms ballong blir truffet:

$$t = \frac{10 + 70\cos(u)}{2 + 35\cos(u)} = \approx 2.18$$

Geværet fyres av 2 sekund senere, dvs. kulen flyr i 0.18 sekund. Innsatt i akselerasjonsleddet gir dette

$$\Delta\mathbf{s} = -\frac{(0.18)^2}{2} \cdot 9.8 \approx -0.16$$

Merk at Ole Brumms ballong befinner seg ved

$$x(2.18) = 20 - 70 \cdot (2.18 - 2) \cdot (cos(0.44)) = 8.60$$

Kulen treffer forhåpentligvis ennå ballongen.

1.2.28

a)

Bruker vi prikkproduktet finner vi

$$0 \leq |a\mathbf{x} \pm b\mathbf{y}|^2 = (a\mathbf{x} \pm b\mathbf{y}) \cdot (a\mathbf{x} \pm b\mathbf{y}) = a^2|\mathbf{x}|^2 \pm 2ab\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + b^2|\mathbf{y}|^2$$

b)

$a = |\mathbf{y}|$ innsatt $b = |\mathbf{x}|$ som i hintet. Da finner vi at

$$0 \leq 2|\mathbf{y}|^2|\mathbf{x}|^2 \pm 2|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Fra dette får vi

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$$

og

$$-\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$$

Sammen gir disse ligningene at

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$$

Dette er ulikheten det spørres om.

Egentlig er det ofte et utsagn om når du har likhet som også skal inkluderes her. Dvs. du har likhet hvis og bare hvis vektorene er parallelle (proposjonale). Dette kan du kanskje overbevise deg om.