MAT1100 - Grublegruppe
Oppgavesett 11

Jørgen O. Lye

Kalkulus

9.2.21

9.2.25

9.2.26

9.5.4

Ekstraoppgave

Vi skal se på Gamma-funksjonen $\Gamma(x)$ som snakkes litt om i kapittel 9.5 i boken.

Definer

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Merk at vi integrerer bort t slik at dette er en funksjon av x. Det frister å definere den som $\int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$, men det er (dessverre) veletablert konvensjon å definere den som over.

Oppgave a)

Vis at funksjonen $\Gamma(x)$ er endelig for $x > 0$. Hint: sammenlign med $1/x^p$, og mer at det er konvergens av

$$\int_0^a t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

som er problemet, ikke

$$\int_a^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Oppgave b)

Bruk induksjon og delvis integrasjon til å vise at

$$n! = \Gamma(n+1)$$

Oppgave c)

Bruk at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

til å vise at $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Du skal *ikke* vise hva integralet over blir. Det kommer først i MAT1110.

I denne forstanden er

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$$

Vis også at

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = 2\sqrt{\pi}$$

FVLA

1.3.5

Fasit

9.2.21

$$\int \frac{dx}{a^2+\cos^2(x)} = \int \frac{\cos^2(x)}{a^2+\cos^2(x)}\, du = \int \frac{\cos^2(x)+a^2-a^2}{a^2+\cos^2(x)}\, du$$
$$= u - a^2 \int \frac{du}{\cos^2(x)}$$

Her kan vi bruke at

$$1+u^2 = 1+\tan^2(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$\frac{du}{\cos^2(x)} = \int (1+u^2)\, du = u + \frac{1}{3}u^3$$

Dvs.

$$\int \frac{dx}{a^2+\cos^2(x)} = u - a^2u - \frac{a^2}{3}u^3 = (1-a^2)\tan(x) - \frac{a^2}{3}\tan^3(x)$$

9.2.25

a)

$$I_0 = \frac{\pi}{4}$$

og (ved substitusjon $u = \cos(x)$)

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan(x)\,dx = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

b)

Som jeg brukte tidligere er

$$\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1$$

slik at

$$\tan^{n+2}(x) = \tan^2(x)\tan^n(x)\tan^n(x)\left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1\right)$$

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^{n+2}\,dx = \int_0^{\pi/4}\left(\frac{\tan^n(x)}{\cos^2(x)} - 1\right) = \int_0^1 u^n\,du - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n$$

Her er $u = \tan(x)$ brukt som substitusjon.

c)

Det er sant for $n = 0$ ved oppgave a). Anta sant opp til en $n-1$. La $m = 2n-1$. Da er $m + 2 = 2n + 1$, og

$$I_{2n+1} = I_{m+2} = \frac{1}{m+1} - I_m = \frac{1}{2n} - I_{2n-1}$$

Bruker vi induksjons på I_{2n-1} får vi

$$[I_{2n+1} = \frac{1}{2n} - I_{2n-1} = \frac{1}{2n} - \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left[\ln(2) - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n-1}\right)\right]$$

$$I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2}\left[\ln(2) - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$$

Dvs. formelen holder for n også. Dermed er det bevist ved induksjon.

d)

$0 \leq \tan(x) < 1$ for $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, slik at $\tan^n(x) \to 0$ for hver x når $n \to \infty$. I MAT1100 skal dere få ta grenser rett inn i integralet, og dermed konkludere at

$$\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\, dx \to 0$$

Da vil også

$$I_{2n+1} \to 0$$

Herfra får man formelen oppgaven påstår.

9.2.26

a)

$$\int \cot(x)\, dx = \ln(\sin(x))$$

ved substitusjonen $u = \sin(x)$.

$$\int \cot^2(x)\, dx = \int \frac{1 - \sin^2(x)}{\sin^2(x)}\, dx = -cot(x) - x$$

b)

For $n = 2$ er

$$I_0 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{4}$$

og

$$I_2 = [-x - \cot(x)]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4} + 1$$

Dermed er

$$I_2 = \frac{1}{2-1} - I_0$$

og formelen holder for $n = 2$. Anta den er sann opp til n. For $n+1$ har vi

$$\int \cot^{n+1}(x)\, dx = \int \cot^{n-1}(x) \cot^2(x)\, dx = \int \cot^{n-1}(x) \left(\frac{1 - \sin^2(x)}{\sin^2(x)} \right) dx = \frac{\cot^n(x)}{n} - I_{n-1}$$

Dette ligner på oppgaven over, og jeg har substituert $u = \cos(x)$ på veien. Setter man inne grensene finner man

$$I_{n+1} = \frac{1}{n} - I_{n-1}$$

dvs formelen er sann for $n+1$.

$$I_4 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - (1 - \frac{\pi}{4}) = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}$$

$$I_5 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - I_1\right)$$

$$I_1 = \ln(\sin(\pi/2)) - \ln(\sin(\pi/4)) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

dvs.

$$I_5 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$$

La $I = \lim_{n\to\infty} I_n$. Tar man grensen av begge sider av

$$I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$$

finner man at

$$I = -I$$

dvs $I = 0$.

Kommentar: merk at foreleseren som gav denne oppgaven tydeligvis ikke synes dere skulle få ta grensen inni integraltegnet og si at $\cot^n(x) \to 0$ $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c)

Merk at $0 \leq \cot(x) \leq 1$ for x i intervallet $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dermed er $\cot^n(x) \leq \cot^m(x)$ når $n > m$. Som i hintet er derfor $I_n \leq I_m$ og følgen er avtagende. Siden den også er nedad begrenset av 0 (hvorfor?) er dette en konvergent følge.

9.5.4

a)

$$A = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$$

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \pi < \infty$$

b)

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 < \infty$$

$$V = \pi \int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$$

Extraoppgave

a)

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^p}} = \lim_{t \to 0} t^{p+x-1}e^{-t} = \lim_{t \to 0} t^{p+x-1}$$

Dette er endelig hvis og bare hvis $x + p - 1 \geq 0$. Integralet

$$\int_0^a \frac{1}{t^p}\, dt$$

konvergerer hvis og bare hvis $p < 1$, slik at $x \geq 1 - p > 1 - 1 = 0$.

For å sjekke at integralet over faktisk divergerer for $x \leq 0$ kan du sammenligne med $1/x$ på samme måte.

b)

Merk at

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = -0 - (-1) = 1$$

Slik at $\Gamma(1) = (1 - 1)! = 1$. For $n > 0$ har vi

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = -t^n e^{-t}\Big|_0^\infty + n \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\, dt = 0 + n\Gamma(n)$$

Dvs $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$. Vi så over at $\Gamma(1) = 0!$. Anta $\Gamma(n) = (n - 1)!$. Da er $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!$ slik at

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

for alle $n \geq 1$ ved induksjon.

c)

$$\Gamma(3/2) = \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t}\, dt$$

Substituer $u = t^{1/2} \implies du = \frac{dt}{2u}$

$$\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$$

Fra formelen

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

er

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma(1/2) = \frac{1}{\frac{3}{2}}\Gamma(1/2) = \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)! = 2\sqrt{\pi}$$

Denne har vi bare bevist for heltallige n, så hvis du ikke stoler på den for alle tall kan du integrere direkte med substitusjonen $u = \sqrt{t}$ som før.