MAT1100 - Grublegruppe
Oppgavesett 13

Jørgen O. Lye

Oppgaver fra FVLA

2.4.7

Denne er nærmere pensum i MAT1110, men dere kan like godt ha sett den nå.

Husk at du må bruke definisjonen av de partiellderiverte her!

For å vise at f ikke er kontinuerlig kan du finne deg en følge slik at $\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$ men $f(\mathbf{x}_n)$ ikke konvergerer mot $f(\mathbf{0})$. Et forslag er $\mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$.

2.5.4

Igjen er denne litt teknisk, men det er greit å ha sett den! Den er som oppgaven over god bruk av definisjonene.

Eksamensoppgave

Dette er oppgave 13 fra eksamen i 2010. Den handler om 1-variabel analyse, men den handler om derivasjon, så jeg tok den med uansett.

Sett

$$f(x) = \frac{1}{2}x|x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hvor er f deriverbar? Hvor er f konveks og hvor er f konkav?

Fasit

2.4.7

a)

Vi regner ut:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2\cdot 0}{h^4+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Analogt for den deriverte i y-retning:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^2\cdot h}{0^4+h^2}-0}{h} = 0$$

Siden $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ og $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$ så er $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

b)

Per definisjon er

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{r})-f(\mathbf{a})}{h}$$

Vi regner ut denne med $\mathbf{a} = 0$ og $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$.

$$f'(\mathbf{0};\mathbf{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{0}+h\mathbf{r})-f(\mathbf{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(hr_1)^2(hr_2)}{(hr_1)^4+(hr_2)^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r_1^2 r_2}{hr_1^4+r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2}$$

Her bruker vi implisitt antagelsen om at $r_2 \neq 0$.

c)

Vi fant i a) at $\nabla f(0,0) = 0$ slik at $\nabla f(\mathbf{0})\cdot\mathbf{r} = 0$ uansett $\mathbf{r}$. Når $r_1 \neq 0$ er $f(\mathbf{0};\mathbf{r}) = \frac{r_1^2}{r_2} \neq 0$, slik at likheten $f(\mathbf{0};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{0})\cdot\mathbf{r}$ umulig kan holde.

d)

Vi viste i *b)* at når $r_2 \neq 0$ finnes den retningsderiverte til funksjonen i $\mathbf{0}$. La oss se hva som skjer med $r_2 = 0$. Anta $r_1 \neq 0$. Da er

$$f'(\mathbf{0};\mathbf{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(hr_1)^2(0\cdot h)}{(hr_1)^4+(h\cdot 0)^2}-0}{h} = 0$$

Anta til slutt at $r_1 = r_2 = 0$. Da er

$$f'(\mathbf{0};\mathbf{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{0})}{h} = 0$$

Dvs. den retningsderiverte finnes i $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ for alle $\mathbf{r}$, og den er lik

$$f'(\mathbf{0};\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{r_1^2}{r_2} & r_2 \neq 0 \\ 0 & r_2 = 0 \end{cases}$$

Siden vi vet at $f'(\mathbf{0};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{r}$ ikke holder for alle $\mathbf{r}$ kan ikke f være deriverbar i $\mathbf{a}$, siden setning 2.4.5 sier at hvis f er deriverbar så skal denne identiteten holde.

For å vise at f ikke er kontinuerlig i 0 vil jeg vise at det finnes følger $\mathbf{x}_n$ som konvergerer mot 0 men som er slik at $f(\mathbf{x}_n)$ ikke går mot $f(\mathbf{0})$. Dette vil vise at f ikke er kontinuerlig i $\mathbf{0}$. Se på $\mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$. Da vil $\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$, men

$$f(\mathbf{x}_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}$$

Dvs, $f(\mathbf{x}_n)$ er uavhenig av n og er konstant ulik 0. Dermed vil $\mathbf{x_n} \to \mathbf{0}$ mens $\frac{1}{2} = f(\mathbf{x}_n) \nrightarrow f(\mathbf{0}) = 0$. Dermed er ikke f kontinuerlig i $\mathbf{0}$.

2.5.4

a)

Hvis $x = y = 0$ er $f(x,y) = 0$ per definisjon. Ser derfor på tilfellet hvor $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f(x,0) = \frac{x^3 \cdot 0 - x \cdot 0^3}{x^2 + 0^2} = 0$$

$$f(0,y) = \frac{0^3 \cdot y - 0 \cdot y^3}{0^2 + y^2} = 0$$

De partiellderiverte er (per definisjon)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

siden begge ledd i telleren er 0 og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

b)

Når man holder seg unna $(0,0)$ er det bare uttrykket for $(x,y) \neq (0,0)$ som gjelder, slik at vi kan partiellderivere dette som vanlig

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Helt analogt finner man det oppgaven sier om $\frac{\partial f}{\partial y}$.

c)

Som i hintet (og per definisjon):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$$

Merk at fra a) er $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Setter man inn $x=0$, $y=h$ i uttrykket for $\frac{\partial f}{\partial x}$ over:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = \frac{h(0^4 + 4\cdot 0^2 \cdot h^2 - h^4)}{(0^2+h^2)^2} = \frac{-h^5}{h^4} = -h$$

Bruker man dette finner man

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Tilsvarende vil for $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ vil si at vi regner ut

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$

Vi er gitt den partiellderiverte med hensyn på y.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = -\frac{h(-h^4)}{h^4} = h$$

Dvs.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Konklusjonen er at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

Eksamensoppgave

Observer at vi kan skrive

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

Det er klart at $\pm\frac{1}{2}x^2$ er deriverbar, så det eneste vi må sjekke er deriverbarhet i $x = 0$. Da sjekker vi begge grensene:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}h^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{2} = 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\frac{1}{2}h^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{h}{2} = 0$$

Siden disse grensene er like er f deriverbar også i 0 (og har derivert lik 0 der).

For å finne hvor f er konveks og konkav vil jeg gjerne dobbelderivere. Borte fra 0 finner vi at

$$f''(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Fra setning 6.4.7 ser vi da at f er konveks på $(0, \infty]$ og konkav på $(-\infty, 0]$. Merk at setning 6.4.7 faktisk gir konveksitet på det lukkede intervallet fra informasjon om den dobbeltderiverte på det indre av indervallet!