MAT1100 - Grublegruppe
Oppgavesett 4

Jørgen O. Lye

Oppgaver fra Kalkulus

6.1.11

Husk at den deriverte til f finnes i et punkt x_0 hvis og bare hvis

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

hvor begge grensene skal finnes (som reelle tall).

6.1.14

Bruk hintet i boken!

5.3.16

Hint: bruk ekstremalverdisetningen på intervaller av formen $[-R, R]$ hvor du lar R bli større og større.

6.1.16

Fasit

6.1.11

a)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-0}{h}$$

Når $h \to 0^+$ er $|h| = h$, slik at

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = +1$$

Når $h \to 0^-$ er $|h| = -h$, som gir

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Siden disse 2 grensene ikke er like finnes ikke $f'(1)$.

b)

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} |h| = 0$$

uansett om $h \to 0^+$ eller $h \to 0^-$. Dette viser at $g'(1)$ finnes (og er lik 0).

6.1.14

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}$$

5.3.6

For stor x vil den høyeste potensen i et polynom dominere:

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

Alle tallene i parantesen er mye mindre enn 1 for stor x. Dette forklarer at

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \infty$$

Siden n er partall er $(-x)^n = x^n$, og samme argument som over viser at

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \infty$$

Siden $P(x) \to \infty$ når $x \to \pm\infty$ må det finnes en $R > 0$ slik at for alle x utenfor $[-R, R]$ så er $P(x) > 0$. Intervallet $[-R, R]$ er lukket og begrenset, slik at P har en minimumsverdi m på intervallet. Hvis $m < 0$ så er det klart at $P(x) \geq m$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Dersom $m > 0$, så er $P(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Uansett viser dette at hvis man velger $K = \min\{m-1, 0\}$ så er $P(x) > K$ for alle $x \in R$.

Det vi har vist er at alle polynomer av partalls-grad er nedad begrenset.

6.1.16

Husk at

$$\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h}$$

$$= \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{\sin(h)} - \sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

(se oppgave 5.4.9) og dermed er

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2(h)}{h(1 + \cos(h))}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{1 + \cos(h)} = -1 \cdot 0 = 0$$

Samler man sammen det vi har vist har vi at

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\sin(x)$$