# MAT1100 - Grublegruppe
# Oppgavesett 5

Jørgen O. Lye

## Oppgaver fra Kalkulus

### 6.2.18

Hint: Bruk induksjon og bruk middelverdisetningen til å bevise induksjonssteget.

### 6.2.19

Hint: Bruk middelverdisetningen til å argumentere for at den deriverte kan tvinges til å være så liten du vil, dvs den er 0.

### 6.2.24

Hint: for å vise at $G$ ikke er minimal i $x = a$ kan du anta $x = a$ er et minimumspunkt og se på ulikheten $G(a) \leq G(a+h)$ for liten $h$. Husk at

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = f(a)$$

Analogt for $x = b$ ikke er minimum.

### 6.4.18

Hint: En ganske grei måte å vise dette er å manipulere lemma 6.4.6 med $a = x$, $b = y$, $c = (1-t)x + ty$. Sett inn uttrykket for $c$ *etter* at du har fått $f(c)$ på en side.

# Fasit

## 6.2.18

For $n = 1$ er utsagnet sant:

$$1 > \ln(1+1) = \ln(2)$$

Anta det er sant opp til $n-1$;

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} > \ln(n)$$

Hvis man legger til $\frac{1}{n}$ på begge sider blir dette

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} > \ln(n) + \frac{1}{n}$$

Hvis vi klarer å vise at $\ln(n) + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$ er vi ferdige.

La $f(x) = \ln(x)$ være definert på intervallet $[n, n+1]$. Da sier skjæringssetningen at det finnes en $c \in (n, n+1)$ slik at

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{n+1-n} = \ln(n+1) - \ln(n)$$

Eller at

$$\frac{1}{c} + \ln(n) = \ln(n+1)$$

Siden $c > n$ er $\frac{1}{c} < \frac{1}{n}$ og dermed er

$$\frac{1}{n} + \ln(n) > \ln(n+1)$$

## 6.2.19

Uansett intervall $[a, b]$ $(a < b)$ så finnes det ved skjæringssetningen en $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dette betyr også at

$$|f'(c)| \cdot |b - a| = |f(b) - f(a)|$$

Per antagelse i oppgaven er

$$|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|^2$$

Dette betyr at

$$|f'(c)| \leq K|b-a|$$

La så $b = a + \frac{\epsilon}{K}$ for en eller annen $\epsilon > 0$. Da finnes det igjen en $c_\epsilon \in (a,b)$ slik at skjæringssetningen holder og at

$$|f'(c_\epsilon)| \leq \epsilon$$

Dette viser at vi kan tvinge den deriverte til å bli vilkårlig liten, slik at den deriverte faktisk er 0.[1]

Dette kan en gjøre overalt langs den reelle linjen og $f'(x)$ er dermed konstant lik 0. Vi vet da at $f(x)$ er konstant.

## 6.2.24

### a)

Funksjonen $G(x)$ er kontinuerlig på et lukket og begrenset intervall. Ekstremalverdisetningen sier da at den har maksimum- og minimumspunkter.

### b)

Anta $x = c = a$, dvs minimumspunktet er i $x = a$. Se på $x = a + h$ for $h > 0$;

$$G(a) = F(a) + 0$$

$$G(a =\leq G(a+h) = F(a+h) - \alpha h$$

Dette gir at

$$\alpha \leq \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

Hvis du lar $h \to 0$ blir dette til

$$\alpha \leq f(a)$$

som motstrider valg av $\alpha$.

Anta $x = c = b$ er minimumspunktet. Da er $G(b) \leq G(b-h)$ for $h \geq 0$ som kan skrives

$$F(b) - \alpha(b-a) \leq F(b-h) - \alpha(b-h-a)$$

Eller

$$\frac{F(b) - F(b-h)}{h} \geq \alpha$$

Lar man igjen $h \to 0$ ser man at $f(b) \geq \alpha$ som motstrider valg av $\alpha$.

Til sammen viser dette at $a \neq c \neq b$.

[1] Argumentet her er essensielt at det eneste tallet $x$ som er slik at $|x| \leq \epsilon$ for alle $\epsilon > 0$ er $x = 0$.

**c)**

Siden minimumspunktet ligger i det indre av intervallet $[a, b]$ må $G'(c)$ være 0.

$$0 = G'(c) = F'(c) - \alpha = f(c) - \alpha \implies f(c) = \alpha$$

## 6.4.18

Husk at linjen mellom 2 punkter $p$ og $q$ kan parametriseres som

$$L(t) = (1-t)p + tq$$

for $t \in [0, 1]$. Betingelsen

$$f[(1-t)x + ty] \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

sier da bare at bildet av linjen mellom $x$ og $y$ skal ligge under linjen mellom $f(x)$ og $f(y)$. Dvs linjen mellom $f(x)$ og $f(y)$ skal ligge over grafen. Dette er hva definisjon 6.4.5 krever.

Hvis man vil kan man regne seg frem ved bruk av lemma 6.4.6. Uansett $c$ mellom $x$ og $y$ finnes det en $t \in (0, 1)$ slik at $c = (1-t)x + ty$. Omformer man ulikheten litt ser man at

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c} \implies f(c)\left(\frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}\right) \leq \frac{f(a)}{c-a} + \frac{f(b)}{b-c}$$

$$f(c) \leq \frac{(b-c)f(a) + (c-a)f(b)}{b-a}$$

Setter man inn uttrykket for $c = (1-t)x + ty$ og regner litt får man (etter litt rett-frem regning)

$$f[(1-t)x + ty] \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

Betingelse for konkav istedenfor konveks er den samme men med ulikheten snudd. Dette kan man f.eks. se fra lemma 6.4.6.