# MAT1100 - Grublegruppe
# Oppgavesett 6

Jørgen O. Lye

## Oppgaver fra Kalkulus

### 7.1.18

### 7.6.17

Hint: Nyttige trigonometriske identiteter er blant annet at

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

og

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Disse gir (blant mye annet) at

$$\tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

### 7.6.8

#### a)

Kontinuitet finner man ved

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$$

skal være lik

$$\lim_{x\to 0^-} (Ae^x + B)$$

Deriverbarhet er de vanlige grensene:

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

og kreve at disse 2 er like.

## 7.4.10

# Fasit

## 7.1.18

### a)

Speil $A$ om x-aksen og observer at kortest avstand mellom 2 punkter er en rett linje.

### b)

Speil $B$ om linjen $m$ og $A$ om linjen $l$ og igjen observer at den korteste avstanden er en rett linje.

## 7.6.17

### a)

$$\arcsin(\cos(x)) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$$

Siden $x \in [0, \pi]$ er $\frac{\pi}{2} - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ slik at arcsin er definert og er invers-funksjonen til sinus.

### b)

$$\arccos(\sin(x)) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$$

Tilsvarende analyse som over hvorfor arccos er definert og er invers-funksjonen til cosinus.

### c)

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$$

Siden $x \in [-1, 1]$ så er arcsin definert og har verdier i $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Derfor har cosinus verdier i $[0, 1]$ slik at det er korrekt å ta den positive roten.

### d)

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2}$$

Tilsvarende analyse som over at dette gir mening.

**e)**

Dobbelvinkelformel:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\sin(2\arctan(x)) = 2\sin(\arctan(x))\cos(\arctan(x))$$

Bruker at

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

og

$$\sin(x) = \cos(x)\tan(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

$$2\sin(\arctan(x))\cos(\arctan(x)) = 2\frac{\tan(\arctan(x))}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(x))}}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(x))}} = \frac{2x}{1+x^2}$$

**f)**

Dobbelvinkelformel:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Bruker uttrykkene for sinus og cosinus som over:

$$\cos(2\arctan(x)) = \cos^2(\arctan(x)) - \sin^2(\arctan(x))$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} - \frac{\tan^2(\arctan(x))}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

## 7.6.8

**a)**

$$\lim_{x\to 0}(Ae^x + B) = A + B = \frac{\arctan(0)}{1+0} = 0 \implies A = -B$$

Merk at $f(0) = 0$, slik at grensene for derivasjon er

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{A(e^h-1)}{h} = A$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\arctan(h)}{h(1+h^2)} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\arctan(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{1+h^2} = 1$$

$$\implies A = 1$$

Konklusjon: $A = 1$, $B = -1$.

### b)

Hvis man ser på den deriverte ser man at

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1-2x\arctan(x)}{(1+x^2)^2} & x \geq 0 \\ e^x & x < 0 \end{cases}$$

Denne er positiv (lik 1) i 0 og negativ i $x = 1$ (lik $\frac{1-\frac{\pi}{2}}{2}$). Ved skjæringssetningen er $f'$ null et sted der og dermed har $f$ et makspunkt.

For negative $x$ er $f'(x)$ aldri 0 mens for $x > 1$ er den deriverte negativ (og ikke 0. Derfor har ikke $f$ andre ekstremalpunkter.

Siden $f$ har horisontale asymptoter i negativ og positiv retning (se c)) som er lavere enn nullpunktet mellom 0 og 1 har $f$ et absolutt maksimum mellom 0 og 1.

### c)

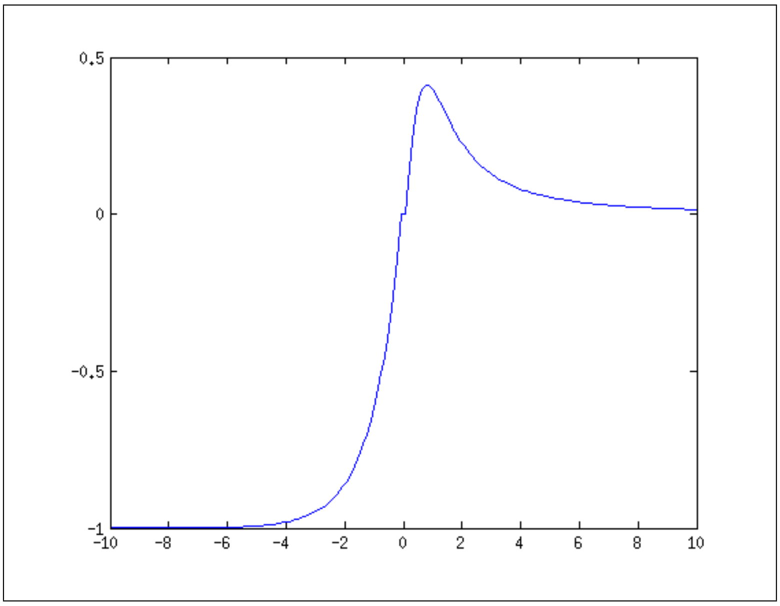
Man kan enten regne ut som vanlig for å finne skrå asymptoter men man ser ganske raskt at begge asymptotene er horisontale, gitt ved

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} = 0$$

og

$$y = \lim_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$$

Skisse av grafen er lagt ved som figur 1. Knekket grafen har i x=0 er en plottefeil og ikke egentlig en egenskap ved grafen.




Figur 1: Plott av funksjonen i oppgave 7.6.8.

## 7.4.10

$$f'(x) = (1 - x^2)e^{(1-x^2)/2} \geq 0$$

Dette viser at funksjonen er injektiv.

Merk at siden den deriverte er positv så er $f$ voksende, slik at verdimengden til $f$ er $[f(-1), f(1)] = [-1, 1]$. Dette er definisjonsområdet til $g$.

$y = f(x)$ og $y \to 1 \iff x \to 1$ fant vi ut av over. Dette kan brukes til å skrive

$$\lim_{y \to 1}(1 - y)(g'(y))^2 = \lim_{x \to 1} \frac{1 - f(x)}{f'(x)^2}$$

Vi vet at $f(x) \to 1$ og $f'(x) \to 0$, så dette er et 0/0-utrykk.

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - f(x)}{f'(x)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{-f'(x)}{2f'(x)f''(x)}$$

Dvs. vi må regne ut $f''(1)$. Denne finner vi lett fra den deriverte over.

$$f''(x) = (-2x + (1 - x^2))e^{(1-x^2)/2}$$

$$f''(1) = -2$$

Dette gir til slutt at

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - f(x)}{f'(x)^2} = -\frac{1}{2 \cdot -2} = \frac{1}{4}$$