MAT1100 - Grublegruppe
Oppgavesett 7

Jørgen O. Lye

Oppgaver fra Kalkulus

8.3.9

8.3.15

8.3.14

Bruk at kontinuerlige funksjoner ikke kan ha isolerte positive (eller negative verdier), men må være ikke-null på et intervall.

8.2.12

NB! Denne er lang og litt kronglete, men ganske lærerik!

Fasit

8.3.9

Definer

$$F(t) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Bruker man middelverdisetningen på denne med intervall [a,b] finner man

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

for en eller annen $c \in (a, b)$. Vi vet at $F'(t) = f(t)$ og at $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$ mens $F(a) = 0$. Dette gir at

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}$$

som er det oppgaven vil ha.

8.3.15

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1} = f(0)$$

Her har jeg brukt at dette er et 0/0-utrykk og at f er kontinuerlig. Siden

$$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$$

er g kontinuerlig.

b)

Anta at $|f(x)| \leq M$ for all x. Anta at $x > 0$. Da er

$$|g(x)| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt$$

$$\leq \frac{1}{x}\int_0^x M\,dt = \frac{xM}{x} = M$$

dvs $|g(x)| \leq M$ og g er begrenset for positiv x. Negativ x er helt analogt.

8.3.14

Siden $g(c) > 0$ og g er kontinuerlig må det finnes et intervall $I_\delta = (c-\delta, c+\delta)$ for en eller annen $\delta > 0$ slik at $g(x) > \epsilon$ for alle $x \in I_\delta$. Dermed er

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_{I_\delta} g(x)\,dx > \epsilon \cdot 2\delta > 0$$

Hvis det ikke hadde funnes noe slikt interval vil det si at $\lim_{x\to c} g(x) = 0 \neq g(c)$, slik at g ikke er kontinuerlig.

Uten antagelsen om kontinuitet er utsagnet feil. Et enkelt moteksempel er

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq c \\ 1 & x = c \end{cases}$$

Denne oppfyller klart $f(c) > 0$ men den er ikke kontinuerlig, og har integral lik 0.

8.2.12

a)

$$i(i+1)(i+2)\cdots(i+k-1) \geq i \cdot i \cdots i \geq i(i-1)\cdots(i-k+1)$$

Ulikhetene skyldes at $i+1 > i > i-1$, $i+2 > i > i-2$ osv.

b)

Merk at for $i = 1$ er $i^{\overline{k}} = 1 \cdot (1+1)\cdots(1+k-1) = k!$. For $n = 1$ sier venstresiden

$$\sum_{i=1}^{1} i^{\overline{k}} = 1^{\overline{k}} = k!$$

Høyresiden er $\frac{(k+1)!}{k+1} = k!$ slik at formelen stemmer for $n = 1$. Anta den stemmer opp til en eller annen n. For $n+1$ har vi da

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^{\overline{k}} = \sum_{i=1}^{n} i^{\overline{k}} + (n+1)^{\overline{k}} = \frac{n^{\overline{k+1}}}{k+1} + (n+1)^{\overline{k}}$$

$$= \frac{n(n+1)\cdots(n+k) + (k+1)(n+1)\cdots(n+k)}{k+1} =$$

$$\frac{(n+(k+1))(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k+1} = \frac{(n+1)^{\overline{k+1}}}{k+1}$$

Dette viser at formelen stemmer også for $n+1$.

Merk at $1^{\underline{k}} = 1(1-1)(1-2)\cdots = 0$ slik at med $n = 2$ er venstresiden 0. Høyresiden er

$$\frac{2^{\underline{k+1}}}{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k+1)+1)}{k+1}$$

Hvis man i tillegg antar at $k > 1$ er høyresiden 0. Med $k = 1$ er *ikke* 0, slik at utsagnet slik det står i oppgaven er litt upresist. Anta derfor $k > 1$ slik at utsagnet er korrekt for $n = 2$. Anta formelen stemmer opp til en eller annen n. $n+1$-leddet ser da slik ut:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\underline{k}} = \sum_{i=1}^{n-1} i^{\underline{k}} + n^{\underline{k}} = \frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1} + n^{\underline{k}}$$

$$= \frac{n(n+1)\cdots(n-k) + (k+1)n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k+1}$$

$$= \frac{((n-k)+(k+1))n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k+1} = \frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}$$

c)

Intervallene er

$$\left[\frac{i-1}{n}a, \frac{i}{n}a\right]$$

for $i = 1, 2, \cdots n$. Den maksimale verdien til x^k er ved høyre endepunkt i hvert intervall, dvs $M_i = \left(\frac{ia}{n}\right)^k$, mens lengden på intervallene er $\frac{a}{n}$. Vi kan derfor skrive

$$\text{Ø}(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ia}{n}\right)^k \cdot \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k \leq \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^{\overline{k}}$$

Den siste ulikheten kommer fra a).

For nedre trappesum, med $m_i = \left(\frac{i-1}{n}a\right)^k$.

$$N(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}a\right)^k \frac{a}{n} = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^k$$

Merk at første ledd i denne summen er 0, slik at summen reelt går fra 2 til n. Skift variabel til $j = i - 1$ og få

$$\sum_{i=2}^{n} (i-1)^k = \sum_{j=1}^{n-1} j^k$$

Tenk over grensene her!

Hvis vi bytter navn tilbake til i igjen viser dette at

$$N(\Pi_n) = \frac{a^{k+1}}{k+1} \sum_{i=1}^{n-1} i^k \leq \frac{a^{k+1}}{k+1} \sum_{i=1}^{n-1} i^{\underline{k}}$$

hvor jeg igjen har brukt a).

d)

Ved b) og c) har vi at

$$\text{Ø}(\Pi_n) \leq \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} \frac{n^{\overline{k+1}}}{k+1}$$

mens

$$N(\Pi_n) \geq \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} \frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1}$$

Merk at

$$\frac{n^{\overline{k+1}}}{n^{k+1}} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{n\cdots n} = \frac{1(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{k}{n})}{1}$$

Slik at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\overline{k+1}}}{n^{k+1}} = 1$$

og dermed også

$$\lim_{n\to\infty} \text{Ø}(\Pi_n) \leq \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Et tilsvarende argument viser at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\underline{k+1}} n^{k+1}}{=} 1$$

og dermed at

$$\lim_{n\to\infty} N(\Pi_n) \geq \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Siden $N(\Pi_n) \leq \text{Ø}(\Pi_n)$ for alle n har vi også at

$$\lim_{n\to\infty} N(\Pi_n) \leq \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

og

$$\lim_{n\to\infty} \text{Ø}(\Pi_n) \geq \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Dette viser at

$$\lim_{n\to\infty} \text{Ø}(\Pi_n) = \frac{a^{k+1}}{k+1} = \lim_{n\to\infty} N(\Pi_n)$$

Dette betyr at integralet finnes og er lik det oppgaven påstår.