MAT1100 - Grublegruppe
Oppgavesett 8

Jørgen O. Lye

Oppgaver fra Kalkulus

8.6.25b)

8.6.31

Drei om y-aksen!

8.6.32

Integrer

$$2\pi \int_0^1 10x^2 \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 \, dx$$

Forklar hvorfor.

8.6.33

Hint:

a)

Klipp opp som oppgaven sier!

b)

Skriv den avkuttede kjeglen som en stor kjegle minus en liten kjegle. Bruk formlikhet mellom trekanter i et snitt av den store og lille kjeglen for å komme i mål.

c)

Omdreiningslegemet blir en avkuttet kjegle...

d)

Skriv arealet av hele tingen som en sum av arealer av mindre avkuttede kjegler og tilnærm grafen med rette linjer.

e)

Tenk deg at $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ og skriv opp Riemann-summen.

f)

Regn ut integralet av $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

9.1.17

Delvis integrasjon med $u = \ln(x)^2$ og $v' = \frac{1}{x^2}$. Andre integral kan du bruke $u = \ln(x)$ og $v' = \frac{1}{x^2}$.

Fasit

8.6.25b)

$$f'(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{(\sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}})^2 + 1}\, dx = \int_0^1 \sqrt{(\sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}})^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

8.6.31

$$M = 2\pi \int_0^{15} x \frac{225 - x^2}{100}\, dx = 225\pi \frac{225}{200} = \frac{3^4 5^4 \pi}{2^3 5^2} = \frac{2025}{8}\pi$$

8.6.32

Kulens volum er gitt ved

$$2\pi \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi$$

Massen kan man finne ved å vekte dette integralet med massetettheten $10x^2$:

$$M = 2\pi \int_0^1 10x^2(1-x^2)\, dx = 20\pi \int x^2 - x^4\, dx = 20\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 20\pi \frac{2}{15} = \frac{8\pi}{3}$$

8.6.33

a)

Gjør som oppgaven sier. Arealet av en sirkelsektor er πrs der s er vinkelen i radianer.

b)

Skriv arealet av den avkuttede kjeglen som $A_1 - A_2$ hvor A_1 er arealet av den store kjeglen mens A_2 er arealet av den lille kjeglen man fjerner. Skriv sidekanten i den store kjeglen som $s + \Delta s$, slik at Δs er sidekanten i den lille. Da er

$$A_1 - A_2 = \pi(s + \Delta s)r_1 - \pi \Delta s r_2$$

Ved formlikhet av trekanter som fremkommer ved å se på tverrsnitt i kjeglene ser man at

$$\frac{s + \Delta s}{r_1} = \frac{\Delta s}{r_2}$$

Denne kan løses for

$$\Delta s = s\left(\frac{r_2}{r_1 - r_2}\right)$$

Setter man dette inn i arealene over finner man at

$$A_1 = \pi s \left(1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}\right) r_1 = \pi s \frac{r_1^2}{r_1 - r_2}$$

$$A_2 = \pi s \frac{r_2^2}{r_1 - r_2}$$

$$A_1 - A_2 = \pi s \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2} = \pi s (r_1 + r_2)$$

c)

Dette er en omskrivning av det vi fant tidligere. Her er

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

og $r_1 + r_2 = y_1 + y_2 = 2y^*$.

d)

Del opp arealet til figuren i flere små biter der man tilnærmer grafen med rette linjer på intervallene $[x_{i-1}, x_i]$. Summerer man opp bidragene får man summen i oppgaven.

e)

Riemann-summen for integralet er

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi y_i^* \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \Delta x_i$$

hvor c_i er et punkt i $[x_{i-1}, x_i]$ slik at $f(c_i) = y_i^* = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}$. Siden $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ for liten nok Δx, dvs stort nok antall inndelinger n, så er summen en god tilnærming til en Riemann-sum. Riemannsummener konvergerer mot integralet (gitt at grensen finnes).

f)

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ tegner opp en kvart sirkel for $0 \leq x \leq r$. Roterer man denne om x-aksen får man en halvkule. Arealet av denne halvkulen er

$$2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} \, dx = 2\pi \int r \, dx = 2\pi r^2$$

Siden dette er arealet av en halvkule er arealet av hele kulen $2 \cdot 2\pi r^2 = 4\pi r^2$.

Volumet av en kule (eller en appelsin) kan skrives som

$$V(R) = \int_0^R A(r) \, dr$$

hvor R er kulens radius. Jeg sier bare at kulens volum er en "sum" av arealet til alle kuler som har radius mindre enn eller lik R og senter i 0. Fra denne formelen ser man at dersom man deler V på n svarer dette til å dele A på n. Dvs deler man en appelsin i n like store biter har alle n like mye skall.

9.1.17

$$V_t = \pi \int_1^t \frac{\ln(x)^2}{x^2}\,dx = \pi \left(-\frac{\ln(x)^2}{x}\Big|_1^t + 2\int_1^t \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \right)$$

$$\int_1^t \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x)}{x}\Big|_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t} + 1$$

$$V_t = \pi \left(-\frac{\ln(t)^2}{t} - \frac{2\ln(t)}{t} - \frac{2}{t} + 2 \right)$$

Siden $\frac{\ln(t)^n}{t} \to 0$ når $t \to \infty$ for alle n ser vi at

$$V_t \to 2\pi$$