MAT1100 - Grublegruppe
Oppgavesett 9

Jørgen O. Lye

Oppgaver fra Kalkulus

9.2.27

a)

Substituer litt smart...

Merk at $\frac{1}{(n+1)\pi+t} < \frac{1}{n\pi+t}$.

b)

Høyre ulikhet er streng for "de fleste t":

$$\frac{\sin(t)}{n\pi + t} < \frac{1}{n\pi + t}$$

$0 < t < \pi$, $t \neq \frac{\pi}{2}$. Tenk hva dette får å si for integralet.

Du trenger også $x > \ln(1 + x)$, som du enten kan godta eller bevise ved middelverdisetningen med $f(t) = \ln(1 + t)$ og intervall $[0, x]$.

c)

Følgen er klemt mellom 2 konvergente følger.

9.2.28

a)

Integrer $(tf(t))'$. Variabelskift $u = f(t)$ slik at $du = f'(t)dt$. Merk at da er $t = f^{-1}(u) = g(u)$.

9.3.38

Hint: $Q(a_i) = 0$. Merk at den deriverte er

$$\lim_{x \to a_k} \frac{Q(x) - Q(a_k)}{x - a_k}$$

og at

$$\frac{Q(a_i) - Q(a_j)}{a_i - a_j} = 0$$

for $i \neq j$.

Fasit

9.2.27

a)

Substituer $t = x - n\pi$. Merk at $\sin(t + n\pi) = \sin(t)\cos(n\pi) + \cos(t)\sin(n\pi) = (-1)^n \sin(t)$.

Ulikheten $|a_{n+1}| < |a_n|$ skyldes bare at

$$|a_{n+1}| = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{(n+1)\pi + t}\, dt < \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{n\pi + t}\, dt = |a_n|$$

b)

Integrer ulikhetene fra 0 til π og bruk hintet over som sier at siden den høyre ulikheten er streng for alle t bortsett fra $\frac{\pi}{2}$ i intervallet vil integralene bli strenge ulikheter.

$$\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{(n+1)\pi} < \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{n\pi + t}\, dt < \int_0^\pi \frac{1}{n\pi + t}\, dt$$

Merk at integralet i midten er lik $|a_n|$. Regner du ut integralene på hver side finner man

$$\frac{2}{(n+1)\pi} < |a_n| < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Siste ulikhet man trenger er at $x > \ln(1+x)$ for $x > 0$. Spesielt for $x = \frac{1}{n}$. Hvis man vil bevise dette, se på $f(t) = \ln(1+t)$ på intervallet $[0, x]$ og bruk middelverdisetningen:

$$1 > \frac{1}{c} = \frac{\ln(1+x)}{x} \implies x > \ln(1+x)$$

c)

Husk oppgave 4.3.11. Siden $\frac{2}{\pi}\frac{1}{n+1} \to 0$ og $\frac{1}{n} \to 0$, og $|a_n|$ ligger skvist imellom disse må $|a_n| \to 0$.

9.2.28

a)

$$\int_a^b (tf(t))'\,dt = bf(b) - af(a)$$

men også

$$\int_a^b f(t) + tf'(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b tf'(t)\,dt$$

Bruk hintet på dette siste integralet og du får

$$\int_a^b tf'(t)\,dt = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\,du$$

Flytt et ledd så få du ligningen i boken.

En tolkning er at integralet til $g = f^{-1}$ er arealet av rektangelet $[a,b] \times [f(a), f(b)]$ minus arealet til området under $f(x)$, dvs integralet. Lag tegninger med $f(x) = x$ og $f(x) = x^2$. $bf(b)$ er et stort rektangel som inkluderer $\int_a^b f(x)\,dx$ og $\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx$ men det mindre rektangelet $af(a)$ er ikke del av noen av integralene og trekkes derfor fra $bf(b)$.

b)

Med $g(u) = \arcsin(\sqrt{u})$ er $f(x) = \sin^2(x)$. Begrunnelsen er at

$$g(f(x)) = \arcsin(\sin(x)) = x$$

Siden $f(b) = 1$ er $b = \frac{\pi}{2}$ og $f(a) = 0$ gir $a = 0$. Dvs

$$\int_0^1 \arcsin(\sqrt{t})\,dt = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\,dx + \frac{\pi}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

9.3.38

a)

Gang med $Q(x)$ og legg til $0 = Q(a_i)$:

$$P(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}Q(x) = Q(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{x-a_i} = \sum_{i=1}^{n} A_i\frac{Q(x)-Q(a_i)}{x-a_i}$$

Velg en k og se på grensen $x \to a_k$:

$$P(a_k) = \lim_{x \to a_k} \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{Q(x) - Q(a_i)}{x - a_i} = A_k \lim_{x \to a_k} \frac{Q(x) - Q(a_k)}{x - a_k} + 0 = A_k Q'(a_k)$$

Dvs

$$A_k = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$$

b)

Observer at $P(x) = x + 2$ og $Q(x) = x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$ og siden $1 \neq 4$ er betingelsene i a) oppfylt. $Q'(x) = 2x - 5$ slik at

$$A_1 = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{3}{-3} = -1$$

og

$$A_2 = \frac{P(4)}{Q'(4)} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{x + 2}{x^2 - 5x + 4} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{2}{x - 4}$$

Dette kan man teste direkte også.