Løsningsforslag til prøveeksamen i MAT1100, H-14

DEL 1

1. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ når $f(x,y) = y\cos(xy)$?

☐ $-\sin(xy)$
☐ $\cos(xy) - y\sin(xy)$
☐ $-x\sin(xy)$
☐ $\cos(xy) - xy\sin(xy)$
☐ $\cos(xy) - y^2\sin(xy) + xy\sin(xy)$

Riktig svar: $\cos(xy) - xy\sin(xy)$. Begrunnelse: Produktregel og kjerneregel.

2. (3 poeng) I hvilken retning stiger funksjonen $f(x,y,z) = xz + y^2$ raskest i punktet $(1,2,-3)$?

☐ $(1,4,-3)$
☐ $(-3,4,1)$
☐ $(2,-3,1)$
☐ $(6,2,-1)$
☐ $(1,3,-4)$

Riktig svar: $(-3,4,1)$. Begrunnelse: $\nabla f(x,y,z) = (z, 2y, x)$, så $\nabla f(1,2,-3) = (-3,4,1)$.

3. (3 poeng) Hva er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a},\mathbf{r})$ til $f(x,y) = x\ln(xy)$ når $\mathbf{a} = (e,1)$ og $\mathbf{r} = (-1,2)$?

☐ $-2+2e$
☐ $2e + \ln 2$
☐ 1
☐ $\ln 2 - 2$
☐ $e - 2\ln 2$

Riktig svar: $-2+2e$. Begrunnelse: $\nabla f(x,y) = (\ln(xy)+1, \frac{x}{y})$, så $\nabla f(e,1) = (2,e)$. Dermed er $f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{r} = (2,e)\cdot(-1,2) = -2+2e$.

4. (3 poeng) Hvis $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, så er $A\mathbf{x}$ lik:

☐ $\begin{pmatrix} 14 & -20 \\ -7 & -15 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} -6 \\ -22 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 42 \\ -10 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 14 & 28 \\ -7 & -15 \end{pmatrix}$

Riktig svar: $\begin{pmatrix} -6 \\ -22 \end{pmatrix}$. Begrunnelse: Dette er bare å gange ut.

5. (3 poeng) Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ er:

☐ 19

☐ 16

☐ 20

☐ $\frac{37}{2}$

☐ 17

Riktig svar: 17. Begrunnelse:

$$\text{areal} = |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = |\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}| = |2 \cdot (-4) - 3 \cdot 3| = |-17| = 17$$

6. (3 poeng) En pyramide har hjørner i punktene $(2, 1, 3)$, $(4, 2, 2)$, $(3, 4, 2)$ og $(3, 2, 6)$. Volumet er:

☐ 3

☐ $\frac{19}{6}$

☐ $\frac{7}{2}$

☐ 4

☐ $\frac{5}{2}$

Riktig svar: 3. Begrunnelse: Setter vi $\mathbf{a} = (2, 1, 3), \mathbf{b} = (4, 2, 2), \mathbf{c} = (3, 4, 2)$ og $\mathbf{d} = (3, 2, 6)$, er pyramiden utspent av vektorene: $\mathbf{a} - \mathbf{d} = (-1, -1, -3), \mathbf{b} - \mathbf{d} = (1, 0, -4), \mathbf{c} - \mathbf{d} = (0, 2, -4)$. Dermed er

$$\text{volum} = \frac{1}{6} |\det(\mathbf{a} - \mathbf{d}, \mathbf{b} - \mathbf{d}, \mathbf{c} - \mathbf{d})| = \frac{1}{6} \cdot |-18| = 3$$

7 (3 poeng) Jacobi-matrisen til funksjonen $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ e^{xy^2} \end{pmatrix}$ er:

☐ $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ e^{xy^2} & e^{xy^2} \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 e^{xy^2} & 2xye^{xy^2} \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2xy + x^2 \\ e^{xy^2} + e^{xy^2} \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ xy^2e^{xy^2} & xy^2e^{xy^2} \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y^2e^{xy^2} & e^{xy^2} \end{pmatrix}$

Riktig svar: $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2e^{xy^2} & 2xye^{xy^2} \end{pmatrix}$. Begrunnelse: Partiellderivér og husk kjerneregelen i nederste linje.

8. (3 poeng) Når vi skal delbrøkoppspalte $\frac{2x^2-3}{(x-1)(x^2+3x+10)^2}$, setter vi uttrykket lik:

☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2+3x+10} + \frac{D}{(x^2+3x+10)^2}$

☐ $\frac{Ax+B}{x-1} + \frac{C}{x^2+3x+10} + \frac{D}{(x^2+3x+10)^2}$

☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+3x+10}$

☐ $\frac{Ax+B}{x-1} + \frac{Cx+D}{(x^2+3x+10)^2}$

☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+3x+10} + \frac{Dx+E}{(x^2+3x+10)^2}$

Riktig svar: $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+3x+10} + \frac{Dx+E}{(x^2+3x+10)^2}$. Begrunnelse: Se reglene i boken.

9. (3 poeng) Volumet til omdreiningslegemet vi får når vi dreier $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, om y-aksen, er:

☐ $7\pi - 14$

☐ π

☐ $2\pi^2 - 4\pi$

☐ $\frac{\pi^2}{3}$

☐ $\pi^2 - 2\pi$

Riktig svar: $\pi^2 - 2\pi$. Begrunnelse: Fra formelen for volumet til et omdreiningslegeme rundt y-aksen, har vi $V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$. Bruker vi delvis integrasjon med $u = x$, $v' = \cos x$, får vi $u' = 1$, $v = \sin x$ og

$$V = 2\pi \left(\Big[x \sin x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \right) = 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \pi^2 - 2\pi$$

10. (3 poeng) Funksjonen F er definert ved $F(x) = \int_0^{x^3} \cos(t^2) \, dt$. Da er $F'(x)$ lik:

☐ $\cos(x^5)$

☐ $2x \cos(x^2)$

☐ $2x \cos(x^6)$

☐ $3x^2 \cos(x^6)$

☐ $3x^2 \cos(x^5)$

Riktig svar: $3x^2\cos(x^6)$. Begrunnelse: Sett $G(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt$. Da er $G'(x) = \cos(x^2)$ ifølge analysens fundamentalteorem. Siden $F(x) = G(x^3)$, får vi fra kjerneregelen

$$F'(x) = G'(x^3)\cdot(3x^2) = \cos((x^3)^2)\cdot(3x^2) = 3x^2\cos(x^6)$$

DEL 2

Oppgave 11

a) (10 poeng) Finn den reelle og den komplekse faktoriseringen til $P(z) = z^3 + 8$.

b) (10 poeng) Finn konstanter A, B og C slik at

$$\frac{12}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

c) (10 poeng) Løs integralet

$$\int \frac{x-4}{x^2-2x+4}\,dx$$

Løsning: a) Ligningen $P(z) = 0$ er ekvivalent med $z^3 = -8$, og følgelig er røttene til $P(z)$ det samme som tredjerøttene til -8. Siden polarformen til -8 er $8e^{i\pi}$, blir tredjerøttene

$$w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$w_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\pi} = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2$$

$$w_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+2\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$

Den komplekse faktoriseringen er dermed

$$z^3 + 8 = (z-w_0)(z-w_1)(z-w_2) = (z+2)(z-1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3})$$

Ganger vi sammen de to siste faktorene, får vi den reelle faktoriseringen

$$z^3 + 8 = (z+2)(z^2-2z+4)$$

Kommentar: Dette punktet kan også løses (enklere?) ved å observere at siden -2 er en rot i $P(z)$, må $P(z)$ være delelig med $z+2$. Utfører vi polynomdivisjonen, får vi den reelle faktorisering, og ved å løse annengradsligningen $z^2-2z+4=0$, får vi så den komplekse faktoriseringen.

b) Multipliserer vi med fellesnevner på begge sider, får vi

$12 = A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2) = (A+B)x^2+(-2A+2B+C)x+4A+2C$

som gir ligningssystemet

$$A+B=0 \qquad -2A+2B+C=0 \qquad 4A+2C=12$$

som har løsningene $A=1, B=-1, C=4$.

c) Den deriverte av nevneren er $2x-2$. Vi starter med å smugle dette uttrykket inn i telleren:

$$I = \int \frac{x-4}{x^2-2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-2x+4}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx - \int \frac{3}{x^2-2x+4}\,dx$$

I det første integralet innfører vi nevneren som ny variabel: $u = x^2-2x+4$, $du = (2x-2)\,dx$:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4)+C$$

I det andre integralet fullfører vi kvadratet i nevneren:

$$I_2 = \int \frac{3}{x^2-2x+4}\,dx = \int \frac{3}{(x-1)^2+3}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx$$

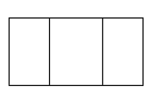
Setter vi nå $z = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$, får vi $dz = \frac{1}{\sqrt{3}}\,dx$ og

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{3}}{z^2+1}\,dz = \sqrt{3}\arctan z + C = \sqrt{3}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

I alt har vi dermed

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) - \sqrt{3}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Oppgave 12 (10 poeng) En speilprodusent planlegger å starte produksjonen av en ny serie. De nye speilene skal ha et areal på 1m^2 og være formet som et rektangel. Speilene blir delt i tre deler av to loddrette lister (se figur). Rundt hele speilet skal det også være lister. Hvor høye må speilene være for at den totale lengden av lister skal bli så kort som mulig?



Et speil

Løsning: Kall høyden til speilet x og lengden y. Lengden av listene er $L = 2y + 4x$. Siden arealet skal være 1m^2, må $xy = 1$, dvs. $y = \frac{1}{x}$, og setter vi dette inn i uttrykket for L, får vi

$$L(x) = \frac{2}{x} + 4x$$

Derivasjon gir $L'(x) = -\frac{2}{x^2} + 4$, og viser at $L'(x) = 0$ når $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Det er lett å sjekke at dette er et minimumspunkt, og følgelig er listlengden kortest når $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Oppgave 13 (10 poeng) I denne oppgaven er $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Vis at den inverse matrisen er

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bruk dette til å finne en vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ slik at $A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Løsning: Ganger vi matrisene, ser vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -4 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siden en høyreinvers også er en venstreinvers, betyr dette at

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

er den inverse matrisen til A. Ganger vi ligningen $A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ fra venstre med A^{-1}, får vi $\mathbf{v} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dermed er

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 14 (10 poeng) Avgjør om det uegentlige integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot x \, dx$$

konvergerer eller divergerer. Finn verdien til integralet dersom det konvergerer.

Løsning: Integranden divergerer når $x \to 0^+$, og vi har derfor at

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot x \, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^{\frac{\pi}{4}} \cot x \, dx$$

Observerer vi at $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, ser vi at det lønner seg å innføre $u = \sin x$ som ny variabel. Da blir $du = \cos x \, dx$, og vi får:

$$\int_a^{\frac{\pi}{4}} \cot x \, dx = \int_{\sin a}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{u} \, du = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln(\sin a)$$

Når a går mot null ovenfra, går $\sin a$ også mot null ovenfra, og dermed går $\ln(\sin a)$ mot $-\infty$. Dette betyr at integralet divergerer. Det går også an å vise divergens ved å sammenligne integranden med $\frac{1}{x}$.

Oppgave 15 (10 poeng) Anta at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon med $f(0) = 0$. Vis at dersom f er deriverbar i 0, finnes det en kontinuerlig funksjon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at $f(x) = xg(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Løsning: Når $x \neq 0$, må $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Spørsmålet er hvordan vi skal definere $g(0)$. Skal g være kontinuerlig i 0, må

$$g(0) = \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = f'(0)$$

der vi har brukt at $f(0) = 0$ og at $f'(0)$ eksisterer. Dersom vi definerer

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ \\ f'(0) & \text{når } x = 0 \end{cases}$$

ser vi at g er kontinuerlig for $x \neq 0$ siden f er det, og at g er kontinuerlig i 0 ifølge regningene ovenfor. Vi ser også at $f(x) = xg(x)$ for alle x.

SLUTT