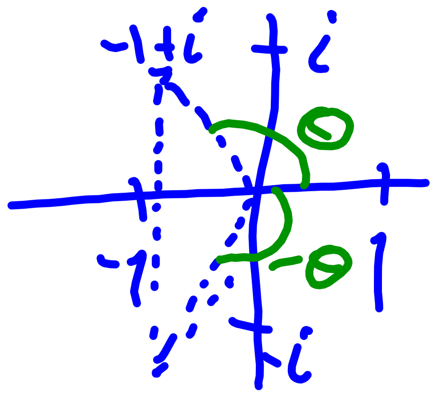
3.4.8 a) Finn alle $z \in \mathbb{C}$ slik at

$$z^3 = -1 + i$$

og tegn de i en figur.



Ukesoppgaver:

3.4: 1bd, 3a, 8, 9a, 11d, 15

3.5: 1ab, 3a, 5, 9

3.3: 10

4.3: 1, 3abd, 4, 11, 13, 14, 15, 18

MEK12: 1, 2, 3, 13

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \quad \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ eller } \theta = -\frac{3\pi}{4}$$

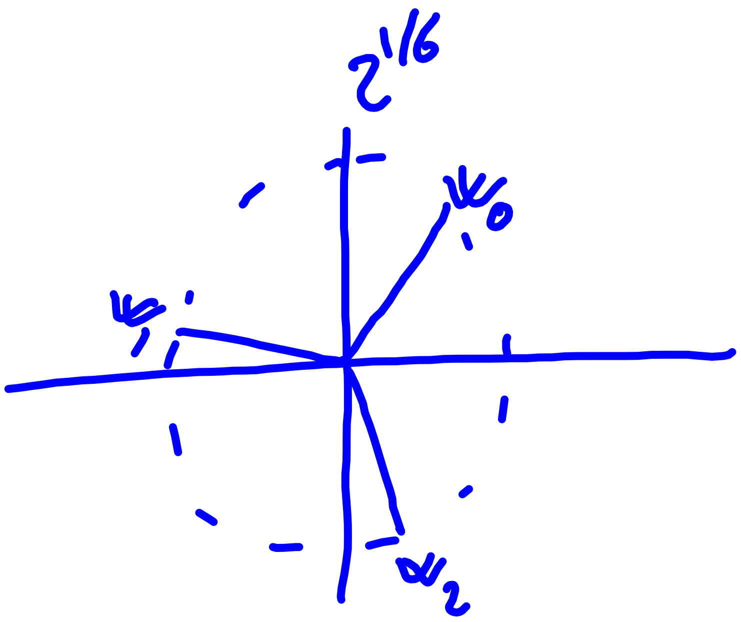
Grafisk $\Rightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$

Ligningen blir da $\quad z^3 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

- $w_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}/3} = (2^{1/2})^{1/3} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \underline{2^{1/6} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}$
- $w_+ = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$w_1 = w_0 \cdot w_+ = 2^{1/6} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = \underline{2^{1/6} e^{i\frac{11\pi}{12}}}$$

$$w_2 = w_1 \cdot w_+ = 2^{1/6} e^{i\frac{11\pi}{12}} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \underline{2^{1/6} e^{i\frac{19\pi}{12}}}$$



b) La $w = w_1 = 2^{1/6} e^{i\frac{11\pi}{12}}$. Vi vil finne en $n \in \mathbb{N}$ s.a.

$$w^n = a,$$

der $a \in \mathbb{R}$.

$$w^n = \left(2^{1/6}\right)^n \left(e^{i\frac{11\pi}{12}}\right)^n = 2^{n/6} e^{i\frac{11n\pi}{12}}$$

Hvis $\frac{11\pi}{12} \cdot n$ skal være et multiplum av π, så må $\frac{11}{12} \cdot n$ være et heltall.

$$\frac{11}{12} = \frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Altså må vi ha $n = 12$ for å få til dette.

$$w^{12} = 2^{12/6} \cdot e^{i\frac{11\pi}{12} \cdot 12} = 2^2 \cdot e^{i11\pi} = \underline{\underline{-4}}.$$

3.5.3a) Finn reell og kompleks faktorisering

av $\quad z^4 + 2z^2 + 1.$

$$z^4 + 2z^2 + 1 = 0$$

$$(z^2)^2 + 2(z^2) + 1 = 0$$

$x = z^2,$ $\quad (z^2+1)^2 = 0 \quad$ (1. kvadratsetn.)

$$\Rightarrow \quad z^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Altså har vi at

$$z^4 + 2z^2 + 1 = \underset{\text{Reelle}}{(z^2+1)^2} = ((z-i)(z+i))^2$$

$$= \underbrace{(z-i)^2(z+i)^2}_{\text{Komplekse.}}$$

4.3.4 c) Vis at $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2} = \frac{1}{3}$ ved def.

Bevis: Gitt $\varepsilon > 0$, så vil vi finne en $N \in \mathbb{N}$ s.a.

$$\left| \frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$$

for alle $n \geq N$.

$$\left| \frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2} - \frac{n+\frac{2}{3}}{3(n+\frac{2}{3})} \right|$$

$$= \left| \frac{n+\frac{1}{2}-(n+\frac{2}{3})}{3n+2} \right| = \left| \frac{\cancel{n}+\frac{1}{2}-\cancel{n}-\frac{2}{3}}{3n+2} \right|$$

$$= \left| \frac{-\frac{1}{6}}{3n+2} \right| = \frac{|-\frac{1}{6}|}{|3n+2|} = \frac{\frac{1}{6}}{3n+2} = \frac{1}{18n+12}$$

Vil ha: $\frac{1}{18n+12} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 18n+12$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} - 12 < 18n \iff n > \frac{1}{18\varepsilon} - \frac{12}{18}$$

Dette betyr at for en gitt $\varepsilon > 0$ vil vi få

$$\left| \frac{n+\frac{1}{2}}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$$

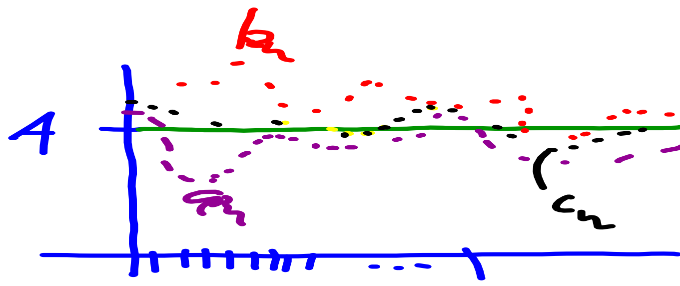
ved å velge N som det minste naturlige tallet større enn $\frac{1}{18\varepsilon} - \frac{12}{18}$.

$\blacksquare$

4.3.11 Skviselemma: Dersom $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$

og $\qquad a_n \leq c_n \leq b_n \quad$ for alle n,

så er $\quad \lim_{n\to\infty} c_n = A.$



Bevis: Vi antar at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \quad \text{og}$$

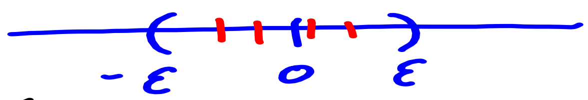
at $\qquad a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n.$

For enhver $\varepsilon > 0$, så finnes det $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ s.a.

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$

og
$$|b_n - A| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2.$$

Merk at dette betyr at



$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \qquad (i)$$

og
$$-\varepsilon < b_n - A < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2. \qquad (ii)$$

Dersom vi velger $N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$, så ser vi at både (i) og (ii) vil være oppfylt.

Vil vise: $\lim_{n\to\infty} c_n = A$

La $\varepsilon > 0$ være gitt, da vil vi fra hhv. (i) og (ii) ha at

$$-\varepsilon < a_n - A \iff -\varepsilon + A < a_n \qquad (i)$$

$$b_n - A < \varepsilon \iff b_n < \varepsilon + A$$

men siden $\quad a_n \leq c_n \leq b_n$ for alle n, så dæær

$$-\varepsilon + A < a_n \leq c_n \leq b_n < \varepsilon + A \quad (\forall n \geq N)$$

$$\iff -\varepsilon + A < c_n < \varepsilon + A$$

$$\iff -\varepsilon < c_n - A < \varepsilon$$

$$|c_n - A| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

$\boxtimes$

4.3.15: **Teorem 4.3.9:** En monoton, begrenset følge er alltid konvergent.

Bevis: (for avtagende) Anta at $\{a_n\}$ er en avtagende og begrenset. Da har vi at ($a_n \geq a_{n+1}$)

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{17}, \ldots\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

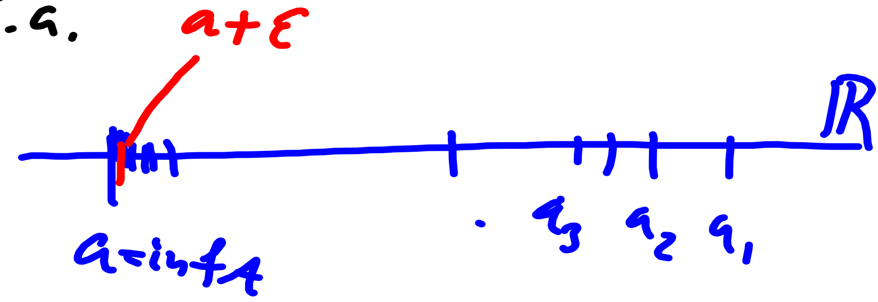
den er ikke-tom og begrenset. Ifølge Setningen 2.3.3 (som følger fra kompletthetsprinsippet) har A en største nedre skranke, a. Vi vil ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

For enhver $\varepsilon > 0$, så skal vi finne en $N \in \mathbb{N}$ s.a.

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Observere: Siden $a = \inf A$, så vil $a_n \geq a \ \forall n$.

Dessuten finnes det en $N \in \mathbb{N}$ s.a.



$a_N < a + \varepsilon$, hvis ikke, så ville $a + \varepsilon$ vært en nedre skranke større enn $\inf A$. Nå, siden følgen er avtagende så vil $a_n < a + \varepsilon \ \forall n \geq N$. Med andre ord

$$a_n - a < \varepsilon \iff |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

$\blacksquare$

4.3.18 La $\{x_n\}$ være gitt ved $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ for $n \geq 1$.

a) Vis at $x_n < x_{n+1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$ ved ind.

$n=1$: $x_1 < x_2$, $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$, så $x_1 < x_2$.

Antar at $x_n < x_{n+1}$. Vi har da

$$x_{n+2} = \sqrt{2x_{n+1}} \iff \frac{x_{n+2}^2}{2} = x_{n+1} \quad (*)$$

Fra ind. antagelsen har vi da at $x_n < x_{n+1}$

$$(*) \quad x_n < x_{n+1} \overset{(*)}{=} \frac{x_{n+2}^2}{2} \iff 2x_n < x_{n+2}^2$$

$$\iff x_{n+2} > \sqrt{2x_n} = x_{n+1}.$$

b) Dersom $x_n \longrightarrow x$:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2x_n} = \sqrt{2x}$$

$$\iff x = \sqrt{2x}$$

$$\iff x^2 = 2x$$ enten er $x=0$ eller så er $x=2$.

$x_n < 2 \quad \forall n$:

$n=1$: $x_1 = 1 < 2$, så ok.

Antar at $x_n < 2$, og vil vise at $x_{n+1} < 2$:

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} < \sqrt{2\,2} = 2.$$

$$\implies x_{n+1} < 2.$$

$\boxtimes$

Da konverg er følgen av teorem 4.3.9.