UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Fredag 9. oktober 2015
Tid for eksamen:	15.00 – 17.00

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg:	Svarark, formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 20 oppgaver. De første 10 teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Om du svarer galt eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Før svarene dine inn på svararket. Krysser du av mer enn ett alternativ på en oppgave, får du 0 poeng.

Oppgave 1. (2 poeng) Hvilket av disse utsagnene er sant:

A) Alle komplekse tall har realdel ulik 0
B) Ingen komplekse tall har et irrasjonalt tall som realdel
C) Ingen komplekse tall har et rasjonalt tall som imaginærdel
D) Alle reelle tall er også komplekse tall
E) Alle komplekse tall er også reelle tall

Oppgave 2. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = -1 + i\sqrt{3}$ kan skrives:

A) $z = \sqrt{3} - i$
B) $z = 2e^{i(\pi/3)}$
C) $z = 2e^{i(2\pi/3)}$
D) $z = 2e^{i(4\pi/3)}$
E) $z = 2e^{i\sqrt{3}}$

Oppgave 3. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = 2e^{i(5\pi/6)}$ kan skrives:

A) $z = -\sqrt{3} + i$
B) $z = -1 + i$
C) $z = -\sqrt{3} - i$
D) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$
E) $z = -i$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. (2 poeng) Ligningen $z^2 - 2z + (1 - 2i) = 0$ har løsninger:

A) $z_1 = 1 - i$ og $z_2 = -i$
B) $z_1 = 2 + i$ og $z_2 = -i$
C) $z_1 = 2 - i$ og $z_2 = -i$
D) $z = 1 - i$ (kun en løsning)
E) $z = 1 + i$ (kun en løsning)

Oppgave 5. (2 poeng) La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge av reelle tall. Hvilket av følgende utsagn er sant:

A) Hvis følgen er voksende og nedad begrenset, så konvergerer den
B) Hvis følgen er voksende og oppad begrenset, så konvergerer den
C) Hvis følgen konvergerer og er nedad begrenset, så er den voksende
D) Hvis følgen konvergerer, så er $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
E) Hvis følgen konvergerer, så er den voksende og oppad begrenset

Oppgave 6. (2 poeng) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(4x^2+1)}{\ln(x+1)}$ er lik:

A) -2
B) -1
C) 0
D) 1
E) 2

Oppgave 7. (2 poeng) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{5x+x^2}$ er lik:

A) -2
B) -1
C) 0
D) 1
E) 2

Oppgave 8. (2 poeng) La $P(z)$ være et polynom med reelle tall som koeffisienter. Hvilket av følgende utsagn er sant:

A) Alle røttene til $P(z)$ er reelle tall
B) Polynomet $P(z)$ har minst en reell rot
C) Polynomet $P(z)$ har minst to ulike komplekse røtter
D) Hvis et komplekst tall z er en rot til $P(z)$, så er også det konjugerte tallet $\overline{z}$ en rot til $P(z)$
E) Hvis et komplekst tall z er en rot til $P(z)$, så må imaginærdelen til z være ulik 0

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 9. (2 poeng) La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge av reelle tall der vi har $a_{n+1} = \sqrt[3]{(a_n^3 + 1)/2}$ for alle $n \geq 1$. Hvilket av følgende utsagn er sant:

A) Hvis følgen konvergerer, så konvergerer den mot 0
B) Hvis følgen konvergerer, så konvergerer den mot 1
C) Hvis følgen konvergerer, så konvergerer den mot 2
D) Hvis følgen konvergerer, så konvergerer den mot 3
E) Følgen divergerer uansett hvilken verdi a_1 har

Oppgave 10. (2 poeng) La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være gitt ved $a_n = e^{-n}(\cos n + (-2)^n)$ for $n \geq 1$. Hvilket av følgende utsagn er sant:

A) Følgen konvergerer mot 1
B) Følgen konvergerer mot 0
C) Følgen konvergerer mot $e/2 + \cos 1$
D) Følgen konvergerer mot $-2/e$
E) Følgen divergerer

Oppgave 11. (3 poeng) Hvilket av følgende utsagn er sant:

A) Alle komplekse tall $z \neq 0$ har minst en reell kvadratrot
B) Alle komplekse tall har minst 4 ulike kvadratrøtter
C) Alle komplekse tall er kvadratroten til et reelt tall
D) Alle komplekse tall $z \neq 0$ har nøyaktig 5 ulike komplekse femterøtter
E) Det finnes komplekse tall $z \neq 0$ som ikke har noen kvadratrot

Oppgave 12. (3 poeng) Den deriverte til $f(x) = \sin(\sin x) + e^x \ln(2x+1)$ er:

A) $\cos(\sin x) + e^x \ln(2x+1) + \frac{e^x}{2x+1}$
B) $\cos(\sin x)\cos x + e^x \ln(2x+1) + \frac{2e^x}{2x+1}$
C) $\cos(\sin x)\sin x + e^x \ln(2x+1) + \frac{2e^x}{2x+1}$
D) $\sin(\sin x)\cos x + e^x \ln(2x+1) + \ln(2x+1)\frac{e^x}{2x+1}$
E) $\cos(\sin x)\cos x + e^x \ln(2x+1) + \frac{e}{2x+1}$

Oppgave 13. (3 poeng) Funksjonen $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ har følgende asymptoter:

A) Horisontal asymptote $y = 1$
B) Vertikal asymptote $x = 1$, skråasymptote $y = x$
C) Vertikal asymptote $x = 1$, skråasymptote $y = x + 1$
D) Vertikal asymptote $y = 1$, skråasymptote $y = 2x$
E) Funksjonen har ingen asymptoter

Oppgave 14. (3 poeng) $\lim_{x\to 0}(1 - x)^{1/x}$ er lik:

A) -2
B) -1
C) 0
D) e^{-1}
E) 2

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 15. (3 poeng) Funksjonen $f(x) = xe^x$ er:

A) Strengt konkav på $[0, \infty)$
B) Strengt konkav på $(-6, 1)$
C) Strengt konkav på $(-3, 0)$
D) Strengt konveks på $(-2, \infty)$
E) Strengt konveks på $(-6, 0)$

Oppgave 16. (3 poeng) La a, b og c være reelle tall. Den deriverte av funksjonen $f(x) = \ln(a + \ln(b + \ln(c + x)))$ er lik:

A) $\frac{b+\ln(c+x)}{a+\ln(b+\ln(c+x))} \cdot \frac{1}{c+x}$
B) $\frac{1}{a+\ln(b+\ln(c+x))} \cdot \frac{1}{b+\ln(c+x)}$
C) $\frac{1}{a+\ln(b+\ln(c+x))} \cdot \frac{1}{c+x}$
D) $\frac{1}{a+\ln(b+\ln(c+x))}$
E) $\frac{1}{a+\ln(b+\ln(c+x))} \cdot \frac{1}{b+\ln(c+x)} \cdot \frac{1}{c+x}$

Oppgave 17. (3 poeng) Hvis f er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ og deriverbar på (a, b), så kan vi konkludere med at det finnes et tall $c \in (a, b)$ slik at:

A) $f(b) - f(a) = f'(c)$
B) $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (a - b)$
C) $f(b) = f(a) + f'(c) \cdot (b - a)$
D) $f'(c) = (f(b) - f(a)) \cdot (b - a)$
E) $f(c) = (f(b) - f(a)) \cdot (b - a)$

Oppgave 18. (3 poeng) En skråasymptote til $f(x) = xe^{7/x}$ er:

A) $y = x + 7$
B) $y = 7x - 1$
C) $y = 7x + 7$
D) $y = x - 7$
E) $y = x + 1$

Oppgave 19. (3 poeng) Hvilket komplekst tall er en tredjerot til tallet $z = 8e^{i(3\pi/2)}$:

A) $z = 2e^{i(7\pi/6)}$
B) $z = 2e^{i(\pi/6)}$
C) $z = (8/3)e^{i(\pi/2)}$
D) $z = e^{i(\pi/6)}$
E) $z = e^{i(11\pi/6)}$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 20. (3 poeng) Hvis funksjonen f *ikke* er kontinuerlig i punktet a, så gjelder:

A) Det fins $\epsilon > 0$ slik at for alle $\delta > 0$ fins det et tall x som oppfyller
$|x - a| < \delta$ og $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$

B) Det fins $\epsilon > 0$ og $\delta > 0$ slik at for alle tall x gjelder at
$|x - a| < \delta$ medfører $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$

C) For alle $\epsilon > 0$ og $\delta > 0$ fins det et tall x med
$|x - a| < \delta$ og $|f(x) - f(a)| > \epsilon$

D) For alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at
$|x - a| < \delta$ medfører $|f(x) - f(a)| > \epsilon$

E) Det fins $\epsilon > 0$ slik at for alle $\delta > 0$ fins det et tall x som oppfyller
$|x - a| < \delta$ og $|f(x) - f(a)| < \epsilon$

SLUTT