UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.
Eksamensdag:	Fredag 12. juni 2009.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent lommeregner.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Under sensureringen teller i utgangspunktet alle deloppgaver (1, 2, 3, 4a, 4b osv.) 10 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1
Finn det stasjonære punktet til $f(x,y) = x^2 + 2xy + 5y^2 + 4y$ og avgjør om det er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et sadelpunkt.

Oppgave 2
Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathcal{C}$ er kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j} \qquad \text{for } t \in [0, 2\pi]$$

og $\mathbf{F}$ er vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = xy^2\ \mathbf{i} + x^2 y\ \mathbf{j} \qquad \text{for } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Oppgave 3
Finn konvergensintervallet til potensrekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n^2+n}}$.

Oppgave 4
a) Vis at volumet til området avgrenset av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ og planet $z = 2x - 4y$ kan skrives

$$V = \iint_A \left(4 - x^2 - 2x - y^2 + 4y\right)\, dxdy$$

der A er et område i xy-planet. Beskriv området A.

b) Regn ut volumet V.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 5

a) Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} -4x+2y+2z &= 0 \\ 3x-6y+3z &= 0 \\ x+4y-5z &= 0 \end{aligned}$$

b) Vis at 1 er en egenverdi for matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

og finn en tilhørende egenvektor.

c) Nedenfor ser du resultatet av en MATLAB-kjøring. Bruk denne til å finne de andre egenverdiene og egenvektorene til A. Velg egenvektorer med heltallige koeffisienter, og skriv $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorer.

```
>> A=[0.6 0.2 0.2;0.3 0.4 0.3;0.1 0.4 0.5];
>> [u,v]=eig(A)

u =

    0.5774    0.7071    0.0000
    0.5774    0.0000   -0.7071
    0.5774   -0.7071    0.7071

v =

    1.0000         0         0
         0    0.4000         0
         0         0    0.1000
```

d) Et firma som driver med dagsutleie av tilhengere, har kontor i tre byer X, Y og Z. En tilhenger kan leveres tilbake ved et fritt valgt kontor uavhengig av hvor den ble leid. Til planlegging bruker firmaet en modell som sier at av de tilhengerne som en uke starter i X, vil 60% starte neste uke i X, 30% vil starte neste uke i Y og 10% vil starte neste uke i Z. Av de tilhengerne som startet i Y, vil 20% starte neste uke i X, 40% i Y og 40% i Z. Av de tilhengerne som startet i Z, vil 20% starte neste uke i X, 30% i Y og 50% i Z. Firmaet har totalt 120 tilhengere som alle i utgangspunktet er i by X. Hvordan fordeler tilhengerne seg på byene X, Y og Z etter n uker dersom modellen er korrekt? Hva skjer med fordelingen når $n \to \infty$?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 6

I denne oppgaven er $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ to deriverbare funksjoner. Forklar at dersom

$$h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

der $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er deriverbar, så er

$$\nabla h(x,y) = \nabla f(u(x,y), v(x,y)) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Vi sier at u og v er *funksjonelt avhengige* dersom det finnes en deriverbar funksjon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ slik at $\nabla f(u,v) \neq \mathbf{0}$ for alle $u, v \in \mathbb{R}^2$ og

$$f(u(x,y), v(x,y)) = 0 \qquad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Vis at dersom u og v er funksjonelt avhengige, så er Jacobi-determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix}$$

lik null for alle $x, y \in \mathbb{R}^2$.

SLUTT