Løsningsforslag utsatt eksamen MAT1110 våren 2011

John Rognes

(1a) $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$DEFE = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1b) Vi har $B = DEFE \cdot A$, så A kan omformes til B ved (1) å legge rad 1 til rad 2, (2) å trekke rad 2 fra rad 1, (3) å legge rad 1 til rad 2, og (4) multiplisere rad 1 med -1, i den rekkefølgen.

(1c) Nei, det er ikke mulig, for $\det(I_2) = 1$, $\det(G) = -1$ og radoperasjoner av type (III) endrer ikke determinanten.

(2a) A er lukket og begrenset, og f er kontinuerlig.

(2b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x^2 + 2y^2 + 2}{(x^2 + 2y^2 + 2)^2}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-4xy}{(x^2 + 2y^2 + 2)^2}.$$

I et stasjonært punkt er $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) = 0$, så $-x^2 + 2y^2 + 2 = 0$ og $-4xy = 0$. Den siste likningen gir $x = 0$ eller $y = 0$. Den første likningen har ingen løsninger for $x = 0$, men har løsningene $x = \pm\sqrt{2}$ for $y = 0$. Bare $\vec{a} = (\sqrt{2}, 0)$ ligger i det indre av A. Funksjonsverdien er $f(\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}/4$.

(2c)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{(-2x)(x^2 + 2y^2 + 2) - (-x^2 + 2y^2 + 2)(4x)}{(x^2 + 2y^2 + 2)^3}$$

så $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2}, 0) = \frac{(-2\sqrt{2})4 - 0}{4^3} = -\sqrt{2}/8$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{(4y)(x^2 + 2y^2 + 2) - (-x^2 + 2y^2 + 2)(8y)}{(x^2 + 2y^2 + 2)^3}$$

så $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\sqrt{2}, 0) = \frac{0 - 0}{4^3} = 0$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{(-4x)(x^2 + 2y^2 + 2) - (-4xy)(8y)}{(x^2 + 2y^2 + 2)^3}$$

så $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sqrt{2}, 0) = \frac{(-4\sqrt{2})4 - 0}{4^3} = -\sqrt{2}/4$.

Hesse-matrisen er

$$Hf(\sqrt{2},0) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/8 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/4 \end{bmatrix}$$

som har bare negative egenverdier, $-\sqrt{2}/8$ og $-\sqrt{2}/4$. Altså er $(\sqrt{2},0)$ et lokalt maksimumspunkt.

(2d) I et lokalt maksimumspunkt eller lokalt minimumspunkt (x,y) på randen til A er

$$\nabla g(x,y) = (2(x-2), 2y)$$

lik $(0,0)$, eller det finnes en konstant λ slik at $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$. Vi har $\nabla g(x,y) = (0,0)$ bare for $(x,y) = (2,0)$, som ikke ligger på randen til A. Derfor må

$$\frac{-x^2+2y^2+2}{(x^2+2y^2+2)^2} = \lambda \cdot 2(x-2)$$
$$\frac{-4xy}{(x^2+2y^2+2)^2} = \lambda \cdot 2y$$

for en λ. Lar $\mu = \lambda \cdot (x^2+2y^2+2)^2$, slik at likningene kan skrives

$$-x^2+2y^2+2 = \mu \cdot 2(x-2)$$
$$-4xy = \mu \cdot 2y$$

Fra den siste likningen er $y = 0$ eller $\mu = -2x$. I det første tilfellet gir bibetingelsen at $x = 1$ eller $x = 3$.

I det siste tilfellet gir den første likningen at $-x^2+2y^2+2 = -4x(x-2)$. Innsatt bibetingelsen gir dette $-x^2+2(1-(x-2)^2)+2 = -4x^2+8x$ som forenkler til $x^2 = 4$. Under bibetingelsen har vi bare løsningene $x = 2$ og $y = 1$ eller $y = -1$.

De lokale minimumspunktene og lokale maksimumspunktene finnes altså blant punktene $(1,0)$ med $f(1,0) = 1/3$, $(2,1)$ med $f(2,1) = 2/8 = 1/4$, $(2,-1)$ med $f(2,-1) = 1/4$ og $(3,0)$ med $f(3,0) = 3/11$. Her er $1/4 < 3/11 < 1/3$, så punktene $(1,0)$ og $(3,0)$ er lokale maksimumspunkter for f på randen til A, og punktene $(2,1)$ og $(2,-1)$ er lokale minimumspunkter for f på randen til A.

(2e) Ser på

$$h(t) = f(2+\cos t, \sin t) = \frac{2+\cos t}{(2+\cos t)^2 + 2\sin^2 t + 2} = \frac{2+\cos t}{7+4\cos t+\sin^2 t}$$

med

$$h'(t) = \frac{(-\sin t)(7+4\cos t+\sin^2 t) - (2+\cos t)(-4\sin t + 2\sin t\cos t)}{(7+4\cos t+\sin^2 t)^2}$$

som har samme fortegn som telleren

$$-7\sin t - 4\sin t\cos t - \sin^3 t + 8\sin t - 4\sin t\cos t + 4\sin t\cos t - 2\sin t\cos^2 t = -\sin t\cos t(\cos t + 4)\,.$$

Denne er 0 for $t = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ og 2π, og er negativ i $(0,\pi/2)$ og $(\pi,3\pi/2)$, mens den er positiv i $(\pi/2,\pi)$ og $(3\pi/2,2\pi)$.

Altså har $f(x,y)$ for (x,y) på randen til A et lokalt maksimum i $\vec{r}(0) = (3,0)$ og i $\vec{r}(\pi) = (1,0)$, og et lokalt minimum i $\vec{r}(\pi/2) = (2,1)$ og i $\vec{r}(3\pi/2) = (2,-1)$.

(2f) Ekstremalpunktene må finnes blant ekstremalpunktet i det indre av A, der $f(\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}/4$, og ekstremalpunktene på randen av A, der $f(1,0) = 1/3$, $f(2,1) = f(2,-1) = 1/4$ og $f(3,0) = 3/11$. Siden $1/4 < 3/11 < 1/3 < \sqrt{2}/4$ er $(\sqrt{2}, 0)$ det globale maksimumspunktet for f på A, mens både $(2,1)$ og $(2,-1)$ er globale minimumspunkter.

(3a)

$$\vec{T}'(u,v,w) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v+w & u+w & u+v \\ vw & uw & uv \end{bmatrix}$$

er radekvivalent med

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & u-v & u-w \\ 0 & (u-v)w & (u-w)v \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & u-v & u-w \\ 0 & 0 & (u-w)(v-w) \end{bmatrix}$$

Radoperasjonene endrer ikke determinanten, så

$$\det \vec{T}'(u,v,w) = 1 \cdot (u-v) \cdot (u-w)(v-w) = (u-v)(u-w)(v-w)\,.$$

(3b) Volumet er

$$\begin{aligned}\iiint_{\vec{T}(D)} 1 \, dxdydz &= \iiint_D |\det \vec{T}'(u,v,w)| \, dudvdw \\ &= \int_0^1 \int_0^u \int_0^v (u-v)(u-w)(v-w) \, dwdvdu\end{aligned}$$

Selv om $\det \vec{T}'(u,v,w) = 0$ på noen deler av randen til D har dette ingen betydning for integralet. Regner videre:

$$\begin{aligned}&= \int_0^1 \int_0^u \int_0^v (u^2v - u^2w + uw^2 - uv^2 + v^2w - vw^2) \, dwdvdu \\ &= \int_0^1 \int_0^u \Big[u^2vw - \frac{u^2w^2}{2} + \frac{uw^3}{3} - uv^2w + \frac{v^2w^2}{2} - \frac{vw^3}{3} \Big]_{w=0}^{w=v} dvdu \\ &= \int_0^1 \int_0^u (u^2v^2 - \frac{u^2v^2}{2} + \frac{uv^3}{3} - uv^3 + \frac{v^4}{2} - \frac{v^4}{3}) \, dvdu \\ &= \int_0^1 \int_0^u (\frac{u^2v^2}{2} - \frac{2uv^3}{3} + \frac{v^4}{6}) \, dvdu \\ &= \int_0^1 \Big[\frac{u^2v^3}{6} - \frac{uv^4}{6} + \frac{v^5}{30} \Big]_{v=0}^{v=u} du \\ &= \int_0^1 (\frac{u^5}{6} - \frac{u^5}{6} + \frac{u^5}{30}) \, du \\ &= \int_0^1 \frac{u^5}{30} \, du = \Big[\frac{u^6}{180} \Big]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{180}\,.\end{aligned}$$