5.1

Topologien på $\mathbb{R}^m$:

$\vec{a} \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$

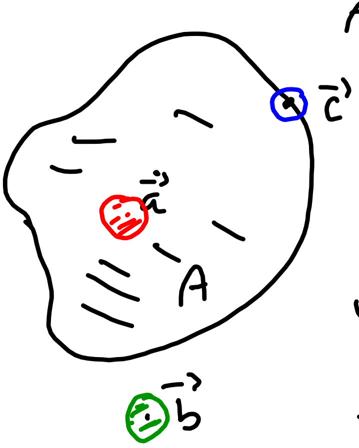
$$B(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid |\vec{x} - \vec{a}| < r \}$$

åpen kule med sentrum $\vec{a}$ radius r

$$\bar{B}(a, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid |\vec{x} - \vec{a}| \leq r \}$$

lukket med sentrum $\vec{a}$ radius r

$A \subset \mathbb{R}^n$



Ser at vi kan finne $r > 0$ s.a. $B(a, r) \subset A$

Slike punkter kaller vi indre punkter for A

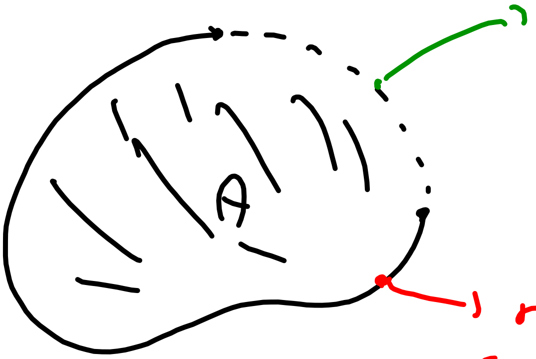
Ser vi at vi kan finne $r > 0$ slik at $B(b, r)$ ikke inneholder noen punkter i A

Kaller $\vec{b}$ et ytre punkt for A.

For $\vec{c}$ gjelder at alle baller $B(c, r)$ vil inneholde noen punkter fra A og andre punkter som ikke er i A.

Vi kaller $\vec{c}$ for ~~...~~ et randpunkt for A

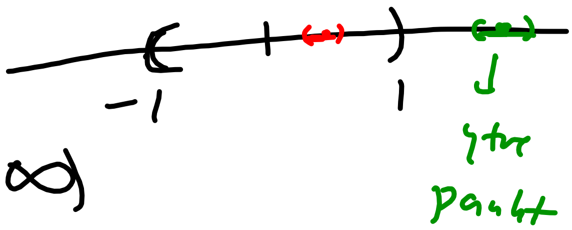
N.B. Et randpunkt for A (som er en generell mengde) kan være et punkt i A og det kan være punkt ~~...~~ som ikke er med i A



$m = 1, \quad A = [-1, 1)$

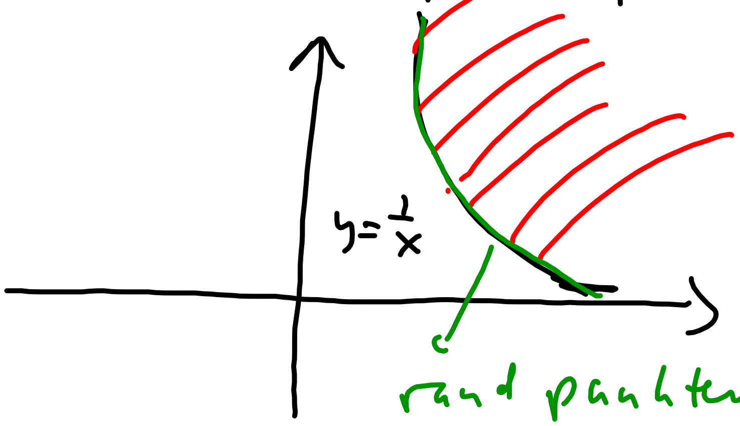
Indre punkter $(-1, 1)$

Ytre punkter $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$



Randpunkter $\{-1, 1\}$

Eks $A = \{(x,y) \mid y \geq \frac{1}{x}, x > 0\}$



randpunkter $= \{y = \frac{1}{x}, x > 0\}$

DEF

En mengde kalles åpen om den ikke inneholder noen randpunkter. En mengde kalles lukket om den inneholder alle sine randpunkter.

(Så mengden A på forrige er lukket
$B = \{ (x,y) \mid y > \frac{1}{x},\ x > 0 \}$
er åpen)

Følger i $\mathbb{R}^n$

En følge er en uendelig sekvens punkter i $\mathbb{R}^n$

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \ldots$

indeksert fra de pos. hele tall.
Dvs. for et hvert slikt helt tall n har vi definert $\vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$.

Noen ganger indekseres følger litt annerledes

$\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \ldots$

$\vec{x}_{-3}, \vec{x}_{-2}, \vec{x}_{-1}, \vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2$

<u>Eks.</u> $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ e^{-n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

følge i $\mathbb{R}^2$. $n = 1, 2, \ldots$

Konvergens av følger

Upresis definisjon i $\mathbb{R}^m$:

En følge $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer mot et punkt $\vec{a}$ i $\mathbb{R}^m$ hvis vi kan få avstanden mellom $\vec{x}_n$ og $\vec{a}$ så liten vi vil bare ved å velge n tilstrekkelig stor.

DEF 5.1.3

$\{\vec{x}_n\}$ konvergerer mot $\vec{a}$, dersom for enhver $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\vec{a} - \vec{x}_n| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$

Skriver dette som $\lim_{n \to \infty} \vec{x}_n = \vec{a}$

eller $\vec{x}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$.

$$\vec{x}_n = (x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}), \quad \vec{a} = (a_1, \ldots, a_m)$$

$$|\vec{a} - \vec{x}_n| = \left((a_1 - x_1^{(n)})^2 + \cdots + (a_m - x_m^{(n)})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Setning 5.1.4

La $\{\vec{x}_n\}$, $\{\vec{y}_n\}$ være to følger i $\mathbb{R}^n$ og anta at $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ og at $\lim_{n\to\infty} \vec{y}_n = \vec{y}$

Da har vi:

(i) $\{c\vec{x}_n\}$ konvergerer mot $c\vec{x}$ for alle $c \in \mathbb{R}$

(ii) $\{\vec{x}_n + \vec{y}_n\}$ —"— $\vec{x} + \vec{y}$

(iii) $\{\vec{x}_n - \vec{y}_n\}$ —"— $\vec{x} - \vec{y}$

(iv) $\{\vec{x}_n \cdot \vec{y}_n\}$ —"— $\vec{x} \cdot \vec{y}$

Bevis

(i) Skal vise $c\vec{x}_n \longrightarrow c\vec{x}$.

Hvis $c=0$ så er $c\vec{x}_n = 0 \ \forall n$ og $c\vec{x} = 0$ og konklusjonen er oppfylt.

Anta $c \neq 0$. Ta $\varepsilon > 0$. Siden $\vec{x}_n \to \vec{x}$ så fins N slik at $|\vec{x} - \vec{x}_n| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ når $n \geq N$. Når $n \geq N$ har vi da

$$|c\vec{x} - c\vec{x}_n| = |c||\vec{x} - \vec{x}_n| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

Viser $c\vec{x}_n \to c\vec{x}$

Setning 5.1.5

La $\vec{x}_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$

la $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^n$

Da gjelder $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$

hvis og bare hvis $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$

for all $i = 1, \dots, m$

<u>Bevis</u> Se boka

<u>Eks</u> $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} n\sin\frac{1}{n} \\ e^{-n} \\ \frac{n^2+n+1}{2n^2-1} \end{pmatrix}$

$n = 1, 2, 3$

$n\sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ siden $\frac{1}{n} \to 0$

og $\frac{\sin x}{x} \to 1$ når $x \to 0$

$e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ siden $e^{-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$$\frac{n^2+n+1}{2n^2-1} = \frac{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{2n^2(1-\frac{1}{2n^2})} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2(1-\frac{1}{2n^2})} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{1}{2n^2} \to 0$

$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

5.2 Komplettheit i $\mathbb{R}^n$

$\{X_n\} = \{\frac{1}{n}\}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ Se på $\{X_{2n-1}\} = \{\frac{1}{2n-1}\}$

$\{y_n = X_{2n-1}\}$ er en delfølge av $\{X_n\}$

Gitt en følge $\{\vec{X}_n\}$, en delfølge er et utvalg av uendelig mange ledd fra følgen $\{X_n\}$ ordnet etter stigende indeks

DEF La $\{\vec{X}_n\}$ være følge i $\mathbb{R}^m$.
La $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$ være en voksende følge naturlige tall
Følgen $\{y_k\} = \{X_{n_k}\}$ kalles da en delfølge av $\{X_n\}$.

Setning 5.2.2 Hvis $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$

Så $\lim_{n\to\infty} \vec{y}_n = \vec{x}$ når $\{\vec{y}_n\}$ er en delfølge av $\{\vec{x}_n\}$

Bevis Kan vare en øvelse

DEF En følge $\{\vec{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ er begrenset om det fins $K > 0$ slik at $|\vec{x}_n| < K$ for alle n.

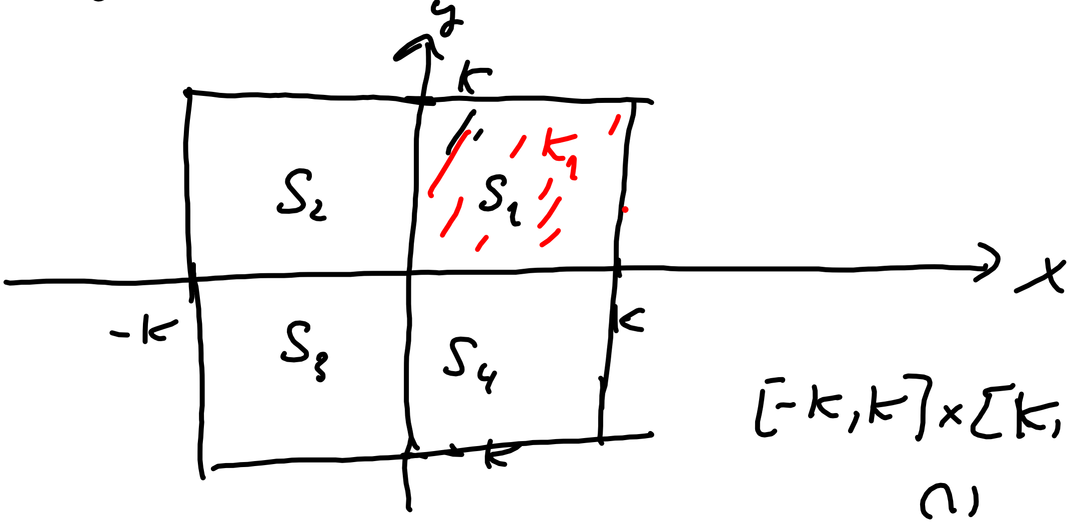
Teorem 5.2.3 (Bolzano-Weierstrass)
Alle begrensete følger i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge.

Bevis

Tar tilfelle $n=2$.

La $\{\vec{x}_n\}$ være en begrenset følge i $\mathbb{R}^2$

dvs. $\exists\, K>0$ s.a. $|\vec{x}_n| \leq K \;\; \forall n$.



$[-K,K]\times[K,K]$

$\cap$

$\mathbb{R}^2$

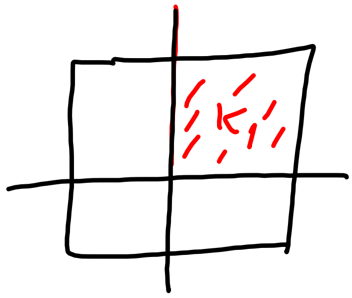
$$|\vec{x}_n| = \sqrt{(x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n)})^2} \leq K$$

$\Rightarrow |x_1^{(n)}|, |x_2^{(n)}| \leq K, \quad \vec{x}_n \in [-K,K]\times[K,K]$

Minst ett av del kvadratene S_1, S_2, S_3, S_4

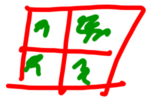
må inneholde ∞-mange ledd fra følgen

Kall dette K_1



K_1 inneholder ∞-mange ledd fra følgen

Del K_1 inn i 4 nye kvadrater



K_1

Et av disse nye delkvadratene må også inneholde ∞-mange ledd

Velg ut et slikt og kall det K_2

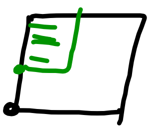
$$[-k,k]\times[-k,k] \supseteq K_1 \supseteq K_2$$

fortsett slik. Får følge mindre og mindre kvadrater

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \quad \dots \supseteq K_k \supseteq K_{k+1} \supseteq \quad \dots$$

som alle inneholder ∞-mange ledd fra følgen. Velg $n_1 < n_2 < \dots < n_k <$

og $\vec{x}_{n_k} \in K_k$.



K_k

$z_k = (a_k, b_k)$

Velg $z_k = (a_k, b_k)$ hjørnepunktet nederst til venstre i K_k. Siden $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \quad \supseteq K_k \supseteq K_{k+1}$

så har vi at

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \quad \leq a_k \leq a_{k+1} \leq$$
$$b_1 \leq b_2 \leq \quad \leq b_k \leq b_{k+1}$$

Siden $z_k \in [-k,k]\times[-k,k]$

er ~~beg~~ både $\{a_k\}$ og $\{b_k\}$ begrenset av k.

Siden $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ er ~~monoton~~

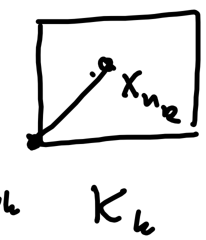
monotont voksende og begrenset så er de begge konvergente (kjent fra MAT1100)

$\lim_{k\to\infty} a_k = a$, $\lim_{k\to\infty} b_k = b$ $\lim_{k\to\infty} \vec{z}_k = \vec{z} = (a,b)$

Skal vise at $\lim_{k\to\infty} \vec{x}_{n_k} = z$.

Har jo $\vec{x}_{n_k}, \vec{z}_k = (a_k, b_k) \in K_k$

K_k er et kvadrat med side $\frac{K}{2^{k-1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$



må da $|z_k - x_{n_k}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Har da

$$|z - x_{n_k}| = |\underbrace{(z - z_k)}_{k\to\infty,\ \to 0} + (z_k - x_{n_k})|$$

$$\le \underbrace{|z - z_k|}_{\downarrow k\to\infty \atop 0} + \underbrace{|z_k - x_{n_k}|}_{\downarrow k\to\infty \atop 0}$$

Vi får altså at $\lim_{k\to\infty} |z - x_{n_k}| = 0$

dvs. $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} z$. Så $\{x_{n_k}\}$ er altså vår søkte konvergente delfølge.

<u>DEF</u> 5.2.4

En følge $\{x_k\}$ i $\mathbb{R}^m$ er en Cauchy følge dersom for enhver $\varepsilon > 0$ fins N slik at $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \varepsilon \quad n, k \geq N$

Skal vise at en følge i $\mathbb{R}^m$ er konvergent hvis og bare hvis den er en Cauchy-følge.