Bolzano-Weierstrass: Hvis $\{\vec{x}_n\}$ er begrenset følge i $\mathbb{R}^m$ så har $\{\vec{x}_n\}$ en konvergent delfølge.

Definerte Cauchy-følgen
$\{\vec{x}_n\}$ er en Cauchy følge dersom for alle $\varepsilon > 0$, fins N s.a. $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \varepsilon$ når $n, k \geq N$.

Har sett at en konvergent følge er en Cauchy følge.

Skal vise at en Cauchy følge i $\mathbb{R}^m$ er konvergent. (Teorem 5.2.6)

Bevis av 5.2.6.

La $\{\vec{x}_n\}$ være Cauchy følge

Da fins N slik at $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < 1$

når $n, k \geq N$. For $n \geq N$ har

vi $|\vec{x}_n| = |\vec{x}_n - \vec{x}_N + \vec{x}_N|$

$\leq |\vec{x}_n - \vec{x}_N| + |\vec{x}_N| < 1 + |\vec{x}_N|$

La $K = \max\{|\vec{x}_1|, \ldots, |\vec{x}_{N-1}|, 1 + |\vec{x}_N|\}$

Har $|\vec{x}_n| \leq K$ for alle n

dvs. følgen er begrenset. B-W $\Rightarrow$

fins konvergent delfølge $\{\vec{x}_{n_k}\}$, $\lim\limits_{k \to \infty} \vec{x}_{n_k} = \vec{x}$

Bevis forts.

La $\varepsilon > 0$, siden $\vec{x}_{n_k} \to \vec{x}$ så fins M s.a. $|\vec{x} - \vec{x}_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $k \geq M$

og (siden $\{\vec{x}_n\}$ er Cauchy) så fins N slik at $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $n, k \geq N$

La $k \geq M$ være slik at $n_k \geq N$

For $n \geq N$ så er

$$|\vec{x} - \vec{x}_n| \leq |\vec{x} - \vec{x}_{n_k}| + |\vec{x}_{n_k} - \vec{x}_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dette viser at $\vec{x}_n \to \vec{x}$. Dvs. $\{\vec{x}_n\}$ er konvergent

En følge i $\mathbb{R}^m$ er konvergent hvis og bare hvis den er en Cauchy følge

I $\mathbb{R}^n$ så kan vi definere avstandsfunksjon ved $|\vec{x}-\vec{y}|$, $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Avstandsfunksjonen oppfyller

$|\vec{x}-\vec{y}| \geq 0$ og lik 0 hviss $\vec{x}=\vec{y}$ (1)

$|\vec{x}-\vec{y}| = |\vec{y}-\vec{x}|$ (er symmetrisk) (2)

Trekant ulikhet

$|\vec{x}-\vec{y}| \leq |\vec{x}-\vec{z}| + |\vec{z}-\vec{y}|$ (3)

Om vi har gitt en eller mengde med avstandsfunksjon med så egenskaper ①, ②, ③ har vi det vi kaller for et metrisk rom.

Kan definere konvergens av følger, og Cauchy følger i et metrisk rom ved hjelp av en slik avstandsfunksjon

DEF Et metrisk rom er komplett hvis enhver Cauchy følge er konvergent.

Har allerede vist at $\mathbb{R}^n$ er komplett (med avstandsfunksjon $|\vec{x}-\vec{y}|$)

La $A \subset \mathbb{R}^m$

definer avstand $\vec{x}, \vec{y} \in A$ ved
$|\vec{x}-\vec{y}|$. Får da et metrisk rom.
Er dette rommet komplett?

Har setning 5.1.6 i boka.
Anta A er lukket og $\{\vec{x}_n\}$ en følge i A
s.a. $\vec{x}_n \to \vec{x}$. Da er $\vec{x} \in \bar{A}$
Forda: enten må $\vec{x}$ være et indre punkt i A
da er $\vec{x} \in A$, eller så er $\vec{x}$ et randpunkt.
Siden A er lukket må da $\vec{x} \in A$.

Hvis nå A er lukket og $\{\vec{x}_n\}$
er Cauchy følge. Så da vet vi at det fins
$\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ s.a. $\vec{x}_n \to \vec{x}$. Siden A er lukket er $\vec{x} \in A$

Dvs. A er komplett.

Å vise at A komplett $\Rightarrow$ A lukket
~~er~~ gir jeg som en øvelse.

A komplett $\Leftrightarrow$ A er lukket

Setning 5.1.7

$A \subset \mathbb{R}^m$

$F: A \to \mathbb{R}^k$

$\vec{a} \in A$. Da er F kontinuerlig i $\vec{a}$

$\iff$ hvergang $\{\vec{x}_n\}$ er følge i A s.a. $\vec{x}_n \to \vec{a}$ så vil $F(\vec{x}_n) \to F(\vec{a})$

Bevis Likt som tilsvarende setning for funksjoner av én variabel i Kalkulus.

Uniform kontinuitet

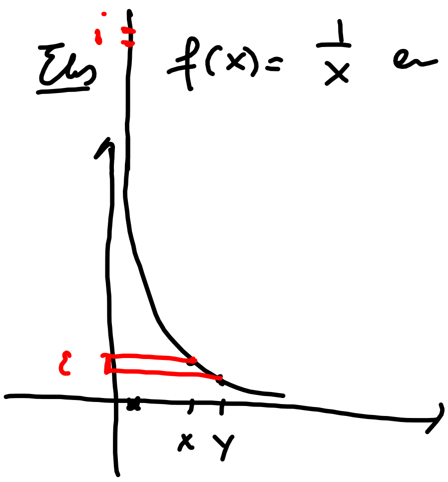
$A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}$, $B \subset A$

DEF 5.3.1

Vi sier at f er uniformt kontinuerlig på B dersom det til enhver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at hvis $\vec{u}, \vec{v} \in B$ og $|\vec{u} - \vec{v}| < \delta$ så er $|f(\vec{u}) - f(\vec{v})| < \varepsilon$

Eks: $f(x) = \frac{1}{x}$ er ikke uniformt kont.

$\varepsilon > 0$



<u>Teorem 5.3.2</u>

La $K \subset \mathbb{R}^m$ være lukket og begrenset (sist betyr at $\exists M > 0$ s.a. $|\vec{x}| \leq M$ når $\vec{x} \in K$)
La $f: K \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon. Da er f uniformt kontinuerlig.

<u>Bevis</u> Anta f ikke er uniformt kontinuerlig. Da fins $\varepsilon > 0$ slik at for enhver $\delta > 0$ fins $\vec{u}, \vec{v} \in K$ slik at $|\vec{u} - \vec{v}| < \delta$ men $|f(\vec{u}) - f(\vec{v})| \geq \varepsilon$. Spesielt kan vi for $\delta = \frac{1}{n}$ finne $\vec{u}_n, \vec{v}_n$ slik at $|\vec{u}_n - \vec{v}_n| < \frac{1}{n}$ men $|f(\vec{u}_n) - f(\vec{v}_n)| \geq \varepsilon$.

K er lukket og begrenset

spesielt er da $\{\vec{u}_n\}$ begrenset.

Så B-W ⇒ det fins $\{\vec{u}_{n_k}\}$ delfølge

som er konvergent dvs. $\vec{u}_{n_k} \to \vec{u}$.

Siden K er lukket er $\vec{u} \in K$.

$$|\vec{u} - \vec{v}_{n_k}| \leq \underbrace{|\vec{u} - \vec{u}_{n_k}|}_{\downarrow k\to\infty \; 0} + \underbrace{|\vec{u}_{n_k} - \vec{v}_{n_k}|}_{\leq \frac{1}{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$\downarrow k\to\infty$

0

$$\vec{v}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{u}.$$

Vet at f er kontinuerlig i $\vec{u}$. Så

$$f(\vec{v}_{n_k}) \to f(\vec{u}), \quad f(\vec{u}_{n_k}) \to f(\vec{u})$$

$$\underbrace{|f(\vec{v}_{n_k}) - f(\vec{u}_{n_k})|}_{\downarrow k\to\infty \; 0} \leq |f(\vec{v}_{n_k}) - f(\vec{u})| \to 0$$

$$+ |f(\vec{u}) - f(\vec{u}_{n_k})| \to 0$$

Umulig fordi vi hadde $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon$

spesielt er $|f(\vec{u}_{n_k}) - f(\vec{v}_{n_k})| \geq \varepsilon$

Selvmotsigelse så f må være uniformt kontinuerlig.

5.4 Iterasjon av funksjoner

$F: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Velg $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, kan lage følge.

$\vec{x}_1 = F(\vec{x}_0)$, $\vec{x}_2 = F(x_1) = F(F(\vec{x}_0))$

fortsetter slik

$$\vec{x}_{n+1} = F(\vec{x}_n) = \underbrace{F(F \quad \cdots \quad}_{n+1} F(x_0) \cdots)$$

Eksempel

x_n antall byttedyr etter n-sesongen

y_n —"— rovdyr —"——

$$x_{n+1} = a x_n - b x_n y_n$$
$$y_{n+1} = c y_n + d x_n y_n$$

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cy + dxy \end{pmatrix}$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n)$$

Velg $a = 1.01$, $b = 3 \cdot 10^{-5}$
$c = 0.98$ $d = 10^{-5}$

5.5

$A \subset \mathbb{R}^m$, $F: A \to \mathbb{R}^n$

DEF

$x \in A$, x er et fikspunkt for F hvis $F(x) = x$.

DEF 5.5.2

F kalles en kontraksjon dersom det fins $0 < C < 1$ slik at $|F(x) - F(y)| \leq C|x-y|$

(N.B. om $|F(x) - F(y)| < |x-y|$ så ikke nødvendigvis F en kontraksjon)

Merk en kontraksjon er automatisk kontinuerlig.

C'en kalles kontraksjonsfaktor.

Teorem 5.5.4 (Banach's fikspunktsats)

A ikke tom, lukket delmengde av $\mathbb{R}^m$

$F: A \to A$ en kontraksjon med kontraksjonsfaktor C.

Da har F nøyaktig ett fikspunkt $x \in A$

<u>Lemma</u> La F og A ~~være~~, og C være som i teoremet. $x, y \in A$

La $F^n(x) = \underbrace{F(F \cdots}_{n} F(x \cdot\cdot)$, $F^n(y)$ tilsvarende.

Da har vi $|F^n(x) - F^n(y)| \leq C^n |x-y|$

<u>Bevis</u> $|F(x) - F(y)| \leq C|x-y|$

$|F^2(x) - F^2(y)| = |F(F(x)) - F(F(y))|$

$\leq C|F(x) - F(y)| \leq C \cdot C|x-y| = C^2|x-y|$

(fortsetter slik)

—

Skisse av bevis av Banach-fikspunkt Sats. Entydighet av fikspunkt.

Anta x, y begge er fikspunkter

Har da $|x-y| = |F(x) - F(y)| \leq C|x-y|$

dvs $|x-y| \leq C|x-y|$ der $0 < C < 1$

umulig med mindre $x = y$.

Skisse av videre bevis.

Velg $x_0 \in A$. Lager følge $x_1 = F(x_0)$

$x_2 = F(x_1)$ osv. viser at denne ~~en~~ følgen er konvergent og grensen er et fikspunkt. Detaljer på fredag.