$A^{\text{lukket}} \subset \mathbb{R}^m$

$F : A \longrightarrow A \quad 0 < C < 1$

$|F(x) - F(y)| \leq C\,|x - y|$

Da har F nøyaktig ett fikspkt.

$(x,\ F(x) = x)$. $x_0 \in A$

Definerer $\{x_n\}$, ved $x_{n+1} = F(x_n)$

Da vil $x_n \longrightarrow x$. og vi har

$$|x - x_n| \leq \frac{C^n}{1 - C}\,|x_0 - x_1|$$

Viste sist at et fikspkt. er entydig. $|F^n(x) - F^n(y)| \leq C^n\,|x - y|$

forts. bevis av Banach fikspkt thm.

$X_n = F^n(X_0)$, n, k, $k > n$

$|X_n - X_k| \leq |X_n - X_{n+1}| + |X_{n+1} - X_{n+2}|$

$+ |X_{n+2} - X_{n+3}| + \cdots\cdots + |X_{k-1} - X_k| \leq$

(bruker trekant ulikhet mange ganger)

$|X_n - X_{n+1}| = |F^n(X_0) - F^n(X_1)| \leq C^n |X_0 - X_1|$

$\leq C^n |X_0 - X_1| + C^{n+1} |X_0 - X_1| + \cdots$

$+ C^{k-1} |X_0 - X_1| = (C^n + C^{n+1} + \cdots + C^{k-1}) |X_0 - X_1|$

$\leq (C^n + C^{n+1} + \cdots + C^{k-1} + C^k + \cdots\cdots) |X_0 - X_1|$

$\left(\sum_{k=n}^{\infty} C^k\right)$

$= \frac{C^n}{1-C} |X_0 - X_1|$, $0 < C < 1$, $\frac{C^n}{1-C} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Dette viser at $\{X_n\}$ er en Cauchy følge. Så det fins $X \in \mathbb{R}^n$ s.a. $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{} X$, A er lukket så $X \in A$

Siden F er kontinuerlig får vi at

$F(X_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} F(X)$, $F(X_n) = X_{n+1}$

$\{F(X_n)\}_{n=0}^{\infty} = \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ må ha $F(X_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} X$

Dvs. $F(X) = X$. X er et fikspkt.

Hadde $|X_n - X_k| \leq \frac{C^n}{1-C} |X_0 - X_1|$

la $k \to \infty$ $|X_n - X_k| \to |X_n - X|$

Vi får da $|X_n - X| \leq \frac{C^n}{1-C} |X_0 - X_1|$

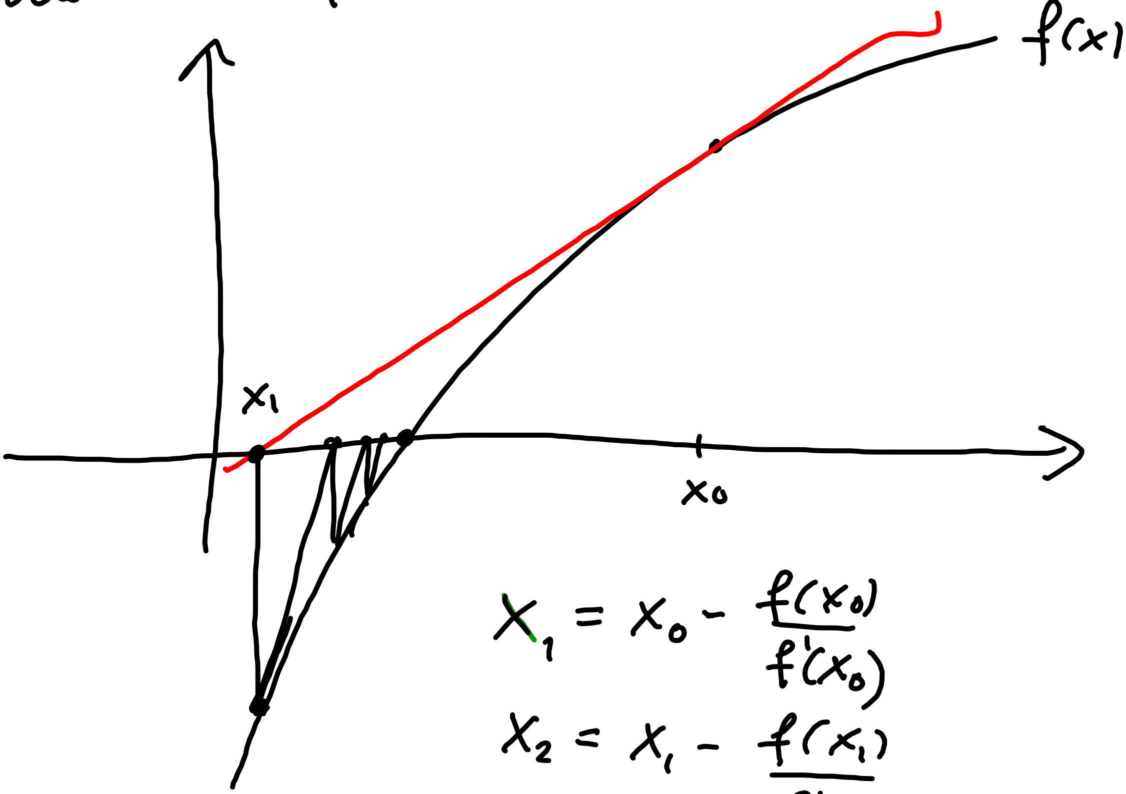
Newtons metode:

Eks

$$x^3 + y^2 = 0$$
$$e^x - y^2 = 0$$

Husker Newton for en variabel

Skulle løse $f(x) = 0$



$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vil gjøre tilsvarende i flere variable

Har $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

skal finne $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ s.a. $F(\bar{x}) = \bar{0}$

Starter x_0. Tar linearisering av F i x_0

$$T_{x_0} F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

Løser $T_{x_0} F(x) = \vec{0}$

$$F(x_0) + F'(x_0)x - F'(x_0)x_0 = 0$$

$$F'(x_0)x = F'(x_0)x_0 - F(x_0)$$

Antar $F'(x_0)$ er inverterbar multipliserer med $(F'(x_0))^{-1}$ får da

$$x = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$$

dvs. setter $x_1 = x_0 - (F'(x_0))^{-1} F(x_0)$ fortsetter slik. Vi får følge definert ved

$$x_{n+1} = x_n - (F'(x_n))^{-1} F(x_n)$$

Eks $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 + y^2 \\ e^x - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 2y \\ e^x & -2y \end{pmatrix}$$

får følge gitt ved

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3x_n^2 & 2y_n \\ e^{x_n} & -2y_n \end{pmatrix}^{-1} F(x_n, y_n)$$

Setter

$$v = \begin{pmatrix} x_n^3 + y_n^2 \\ \exp(x_n) - y_n^2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3x_n^2 & 2y_n \\ \exp(x_n) & -2y_n \end{pmatrix}$$

$$u = u - A^{-1} v = u - A \backslash v$$

$$A\vec{x} = v \quad x = A \backslash v = A^{-1} v$$

Kan lage slik løkke kjøre mange ganger i MatLab.
u vil „forhåpentligvis" nærme seg et null pkt.

<u>Merk.</u> $G(x) = x - (F'(x))^{-1} F(x)$
så har vi $x_{n+1} = G(x_n)$
m.a.o. søker et fikspkt for denne G'en.

Kantorovitsj teorem forteller at om $|x_1 - x_0| = |(F'(x_0))^{-1} F(x_0)|$ er lite sammenliknet med $|F(x_0)|$ og $|F'(x_0)|$ så vil dette konvergere

5.7 Omvendte og implisitte funksjoner.

Fra kalkulus (en variabel)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervall

Anta f er injektiv, dvs. $f(x)=f(y)$ så er $x=y$. $J = \{y \mid y=f(x) \text{ for en } x\in I\}$

Kan da definere $f^{-1} = g: J \to I$ ved $g(y) = x$ der x er slik at $f(x)=y$. Får $f(g(y))=y$, $g(f(x)) = x$

Anta nå $f: I \to \mathbb{R}$ er deriverbar med f.eks kontinuerlig derivert og $f'(x) \neq 0$ $\forall x$. Da må enten $f'(x) > 0$ $\forall x$ og f er strengt voksende eller $f'(x) < 0$ $\forall x$ og f er strengt avtagende.

Uansett blir da f injektiv

Kan altså definere $f^{-1} = g: J = f(I) \to I$ som over. I tillegg har vi

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{der } f(x) = y.$$

La nå $D_F \subseteq \mathbb{R}^n$

$F: D_F \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Sett $V_F = \{ \vec{y} \mid \vec{y} = F(\vec{x}), \vec{x} \in D_F \}$

Om F er injektiv, kan definere

$G = F^{-1}: V_F \to D_F$ ved

$G(\vec{y}) = \vec{x}$ der $\vec{x} \in D_F$ er slik at $F(\vec{x}) = \vec{y}$.

Teorem 5.7.2

(Omvendt (invers) funksjons teorem)

Anta $U \overset{\text{åpen}}{\subset} \mathbb{R}^n$ og

$F: U \to \mathbb{R}^n$ med kontinuerlige partielt deriverte (dvs. F er deriverbar)

Anta $\vec{x}_0 \in U$ og $F'(x_0)$ er inverterbar.

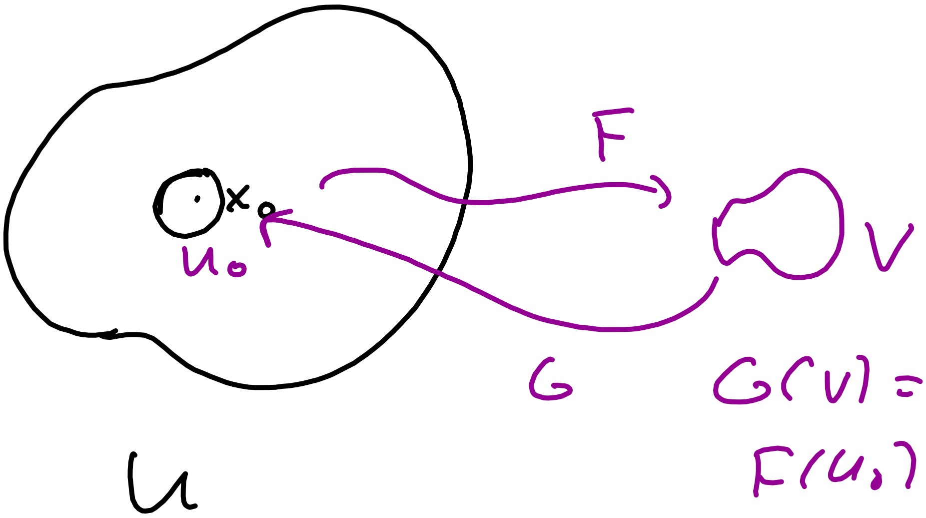
Da fins en åpen omegn $U_0 \subset U$ om $\vec{x}_0$ slik at $F|U_0$ er injektiv

$V = F(U_0) = \{\vec{y} \mid F(\vec{x}) = y,\ \vec{x} \in U_0\}$ er åpen omegn om $\vec{y}_0 = F(\vec{x}_0)$

og den omvendte funksjonen

$G = F^{-1}: V \to U_0$ er deriverbar i y_0

med Jacobi-matrise $G'(y_0) = F'(x_0)^{-1}$



$G(V) = U_0$

$F(U_0) = V$

Skal bevise at $G'(y_0) = F'(x_0)^{-1}$

Har at $x = G(F(x))$

regner ut den deriverte ved kjerneregel

$I = G'(F(x))\,F'(x) \qquad x = x_0$

$$I = G'(F(x_0))\,F'(x_0)$$
$$= G'(y_0)\,F'(x_0)$$
$$\Rightarrow G'(y_0) = (F'(x_0))^{-1}$$

Eksempel

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^3+y^2 \\ e^x-y^2 \end{pmatrix}$$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 2y \\ e^x & -2y \end{pmatrix}$$

$(x_0,y_0) = (0,1)$

$$F'(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \det F'(0,1) = -2 \neq 0$$

$F'(0,1)$ er altså inverterbar

Fra teoremet fins altså U_0 omegn om $(0,1)$ og V omegn om $F(0,1)=(1,0)$ og $G: V \to U_0$ omvendt funksjon til $F: U_0 \to V$ $\quad G'(1,0) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right)$$

Implisitt funksjons teorem

$x^2+y^2+z^2=1$ kuleflate

Er denne flaten en graf f. eks.
$z=f(x,y)$ som tjat
(lokalt er den det)

Se punktet $(0,0,1) \in S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$
Hvis $z \geq 0$, $z^2 = 1-x^2-y^2$, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

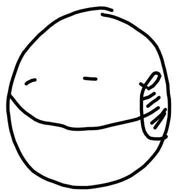
Rundt $(0,0,1)$ kan skrive
flaten som $z=f(x,y)$, $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

Rundt $(0,0,-1)$ kan skrive flaten
$f(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$.

$h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$
Har $\frac{\partial h}{\partial z} = 2z$, $\frac{\partial h}{\partial z}(0,0,\pm 1) = \pm 2 \neq 0$

Se på $(1,0,0)$, $\frac{\partial h}{\partial z}(1,0,0) = 0$

Ser også at vi ikke kan skrive
flaten som $z=f(x,y)$
rundt $(1,0,0)$



For gitt (x,y)
har vi $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

Implisitt funksjonsteorem kan
gi svaret på når en flate
$h(x,y,z)=0$ kan lokalt
skrives som en graf $z=f(x,y)$.