$\{x^2+y^2+z^2=1\} = S$

rundt $(0,0,1)$ kan skrive S

som $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

rundt $(1,0,0)$ kan skrive

S som $x = \sqrt{1-y^2-z^2}$

Generelt har vi gitt

en mengde $f(x_1, \dots, x_m, y) = 0$

(i $m+1$ variable) og vi har

$(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{m+1}$

slik at $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$

Anta nå at det finns omegn

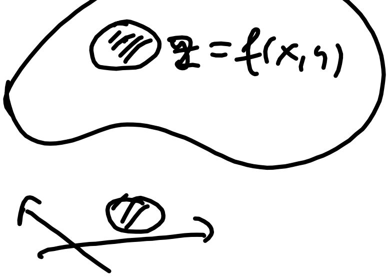
$U_0 \subset \mathbb{R}^m$ om $\bar{x}$ og funksjon

$g: U_0 \to \mathbb{R}$ slik at lokalt rundt

$(\bar{x},\bar{y})$ er S gitt som en graf

$y = g(x) = g(x_1, \dots, x_m)$

så sier vi at S er <u>implisitt</u> gitt



S her i $\mathbb{R}^3$

med $x_1 = x$, $x_2 = y$

og $y = z$.

Betingelser for at dette er mulig Implisitt funksjonsteorem:

<u>Teorem 5.7.3</u>

La $U^{\text{åpen}} \subset \mathbb{R}^{m+1}$,

$f: U \to \mathbb{R}$ funksjon med kont. partielt deriverte. La $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, \bar{y}) \in U$ s.a. $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Anta videre $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$. Da fins en omegn U_0 om $\bar{x}$ og en deriverbar funksjon $g: U_0 \to \mathbb{R}$ s.a. $g(\bar{x}) = \bar{y}$ og $f(x, g(x)) = 0$ for $x \in U_0$

(Dvs. $f(x,y) = 0$ $(x = (x_1, \ldots, x_m))$ inneholder grafen $y = g(x)$).

Den deriverte til g i $\bar{x}$ er gitt ved

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})}$$

<u>Kommentar</u> Fra beviset kan vi se at om $S = \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ så fins omegn $\bar{U}$ om $(\bar{x}, \bar{y})$ i $\mathbb{R}^{m+1}$ s.a. $S \cap \bar{U} = \{(x, g(x)) \mid x \in U_0\}$

<u>Bevis</u> for uttrykket $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x})$.

Har $f(x, g(x)) = 0$

deriverer og så bruke kjerneregel:

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(x, g(x)) \right) \overset{\text{kjerneregel}}{=}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

setter inn for $x = \bar{x}$, $g(\bar{x}) = \bar{y}$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}) = - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})$$

Eks.

$f(x,y,z) = xye^z + \sin(z)$

$f(1,1,0) = 1$, Se på $f(x,y,z) = 1$

(eller $\bar{f}(x,y,z) = 0$, $\bar{f} = f - 1$)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xye^z + \cos(z) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = 1 + 1 = 2 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \neq 0$$

Konklusjon: Fra implisitt funksjonsteoremet fins

$g : U_0 \to \mathbb{R}$, med $(1,1) \in U_0$

s.a. $g(1,1) = 0$ og $f(x,y,g(x,y)) = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^z$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0) = 1$. Vi får:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = -1/2 = \frac{\partial g}{\partial y}(1,1)$$

(Her $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y = z$)

<u>5.8</u>

$A \subset \mathbb{R}^m$

<u>DEF.</u> 5.8.1

$f: A \to \mathbb{R}$. Vi sier at f er begrenset om det $K, M \in \mathbb{R}$ s.a. $K \leq f(x) \leq M$

Vi sier $c \in A$ er et globalt maks. punkt (min. punkt) for f hvis $f(c) \geq f(x)$ ($f(c) \leq f(x)$) for alle $x \in A$

~~T~~eorem (5.8.2)
(Ekstremalverdi-setningen)
Anta nå at $f: A \to \mathbb{R}$
der $A \subset \mathbb{R}^m$ er en lukket og
begrenset mengde (A er begrenset
betyr at det fins $K > 0$ s.a. $|\vec{x}| < K$
for alle $\vec{x} \in A$) og f er kontinuerlig
Da har f (globale) maksspunkter
og (globale) minpunkter i A

Bevis: Viser at f har maks. punkt.

$M = \sup \{ f(x) \mid x \in A \}$

(og om f ikke er opp til begrenset setter vi $M = \infty$)

Vet (fra Kalkulus)

at det fins en $x_n \in A$

s.a. $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M$

Siden A er begrenset så er $\{x_n\}$ begrenset, $B \& W \Rightarrow \exists\ c \in \mathbb{R}^n$

og delfølge x_{n_k} s.a. $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} c$.

Siden A er lukket så vil $c \in A$.

Siden f er kontinuerlig vil

$f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(c)$. Får $f(c) = M < \infty$

Siden $M = \sup \{ f(x) \mid x \in A \}$

må da $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in A$

c er altså et globalt maks. plt.

(Min plt blir tilsvarende)

—

5.9

$A \subset \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}$

DEF 5.9.1

$a \in A$ er lokalt makspkt (min. pkt) for f hvis det fins en kule $B(a,r)$ s.a. $f(a) \geq f(x)$ ($f(a) \leq f(x)$) for alle $x \in B(a,r) \cap A$

Setning

$f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ et indrepunkt

Anta f er deriverbar i a.

Hvis a er et lokalt maks eller minpunkt for f så har vi

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ for $i = 1, \dots, m$ ($\vec{\nabla} f(a) = 0$)

<u>Bevis</u> $a = (a_1, \dots, a_n)$

Sett $g(x) = f(a_1, a_2, \quad , a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$

Hvis nå a er lok. maks eller min for

f så er a_i et —"— g.

Fra Kalkulus vet vi at

$0 = g'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

Eks.

Gitt $f(x,y) = x^3 - 3x - y^2$

Hvor kan ev. lokale maks. eller min for f være?

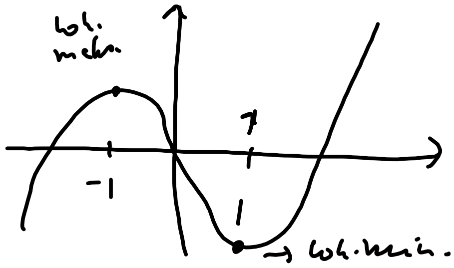
Finn stasjonære punkter

dvs punkter der $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y \quad = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x^2 = 1,\ x = \pm 1 \\ &y = 0 \end{aligned}$$

$(1,0)$, $(-1,0)$ er stasjonære punkter.

Sett $g(x) = x^3 - 3x$, $f(x,y) = g(x) - y^2$



Vi har da

$f(-1,0) = g(-1) \geq g(x)$

$\geq g(x) - y^2 = f(x,y)$

(x,y) nær $(-1,0)$

$(-1,0)$ er lok. maks. punkt for f.

Om $(x,0)$ er nær $(1,0)$, $x \neq 1$

Har vi $f(x,0) = g(x) \geq g(1) = f(1,0)$

Om vi y er nær 0 og $y \neq 0$

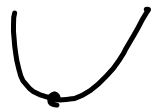
$f(1,y) = g(1) - y^2 < g(1) = f(1,0)$

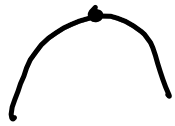
så $(1,0)$ er ikke noe lokalt ekstrempunkt (hverken lokalt maks eller min.) Vi sier at

$(1,0)$ er et sadelpunkt

Husker fra Kalkulus

$f(x)$, $f'(a) = 0$

$f''(a) > 0$ har et lok. minpkt 

$f''(a) < 0$ —||— lok. maks.pkt 

2. derivert testen.

Hva gjelder i flere variable.

$f(x_1, \ldots, x_m)$ anta f

har kontinuerlige partielt

deriverte av orden 2.

Kan da danne matrisa

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a), & \cdots & , \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a), & \cdots & , \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(a) \end{pmatrix}$$

$(m \times m)$ matris

$Hf(\vec{a})$ (Hessematrisen ~~i~~ for f i $\vec{a}$).

Siden de 2. ordens deriverte er kontinuerlig så blir $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

$\Longrightarrow$ $H(f)(\vec{a})$ blir en symmetrisk matrise.

$m = 2, \quad H(f)(a)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Siden $H(f)(a)$ er symmetrisk $m \times m$ matrise så har den m-egenverdier $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$ og en tilhørende ortonormal basis og egenvektorer $v_1, \ldots, v_m$.
(Spektralteoremet mat i MAT 1120)

2. derivert testen i flere variable:

Teorem 5.9.6

La $\vec{a}$ være et stasjonært punkt for $f(x_1, \ldots, x_m)$

Anta f har 2. ordens kont. partielt deriverte

a) Hvis alle egenverdiene til $H(f)(\vec{a})$ er positive så har f et lok. minpunkt i $\vec{a}$.

b) Hvis alle egenverdiene er negative så har f et lok. makspkt. i $\vec{a}$.

c) Hvis $H(f)(\vec{a})$ har både strengt positive og strengt negative egenverdier så har f et sadelpunkt i $\vec{a}$.

d) Hvis noen egenverdier er 0 og de andre har samme fortegn så gir testen ingen konklusjon.

$m=2$

$$H(f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - H(f)(a)) = \left| \begin{pmatrix} \lambda - A & -B \\ -B & \lambda - C \end{pmatrix} \right|$$

$$\lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2)$$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

$$A + C = \lambda_1 + \lambda_2, \quad AC - B^2 = \lambda_1 \lambda_2$$

Hvis λ_1, λ_2 har samme fortegn så er $AC - B^2 > 0 \Rightarrow A$ og C har samme fortegn. A (eller C) samme fortegn som λ_1 og λ_2

2. derivert testen

$A > 0$, $AC - B^2 > 0$

$\Rightarrow$ vi har lok. minpkt.

$A < 0$, $AC - B^2 > 0$

$\Rightarrow$ vi har lok. maks. punkt.

$AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ Sadelpunkt.

$AC - B^2 = 0$. Kan ikke si noe.