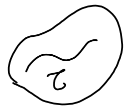
Linjeintegral av skalarfelt.

$A \subset \mathbb{R}^n$



$\vec{r}: [a,b] \to A$

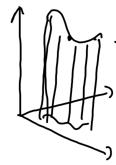
stykkevis glatt parametrisering av C

Gitt $f: A \to \mathbb{R}$

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(r(t))\,v(t)\,dt$$

$v(t) = \|\vec{r}\,'(t)\|$. Linjeintegralet av f langs C

Hvis $A \subset \mathbb{R}^2$, $f \geq 0$



$\int_C f\,ds$ svarer til arealet av området

|||

Eks $f(x,y,z) = x$ C er gitt ved $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, \frac{1}{3}t^3\right)$, $t \in [0,1]$

$$\int_C f\,ds = \int_0^1 f(\vec{r}(t))\,v(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{1^2+\left(\frac{2}{\sqrt{2}}t\right)^2+(t^2)^2}\,dt$$

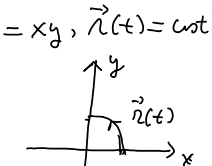
$$= \int_0^1 t\sqrt{\underbrace{1+2t^2+t^4}_{(1+t^2)^2}}\,dt =$$

$$= \int_0^1 t(1+t^2)\,dt = \int_0^1 (t+t^3)\,dt$$

$$= \Big|_0^1 \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Eks $f(x,y) = xy$, $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$

$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$



$$\int_C f\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \underbrace{\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t}}_{\substack{= \\ 1}}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \underbrace{\sin t}_{u}\,\overset{du}{dt} = \int_0^1 u\,du = \Big|_0^1 \frac{1}{2}u^2$$

$u = \sin t$

$du = \cos t\,dt$

$$= \frac{1}{2}$$

Parametriserer C på en annen måte:

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{1-t^2}, t) \quad t \in [0,1]$$

$$\int_C f\,ds = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,t\,v(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,t\sqrt{\left(\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\right)^2 + 1}\,dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,t\sqrt{\frac{t^2}{1-t^2}+1}\,dt$$

$$= \int_0^1 \cancel{\sqrt{1-t^2}}\,t\sqrt{\frac{1}{\cancel{1-t^2}}}\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

Får det samme som i sted

Viser at vi alltid får det samme

DEF (3.3.4)

Gitt $\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$\vec{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$

to glatte (eller stykkevis glatte) par. av kurve C. Vi sier at $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ er ekvivalente om det fins

$\phi : [a,b] \to [c,d]$ s.a.

i) $\vec{r}_2(\phi(t)) = \vec{r}_1(t)$

ii) ϕ er kont. og $\phi([a,b]) = [c,d]$

iii) ϕ' er kont og $\neq 0$ på (a,b)

Hvis ϕ er strengt voksende (dvs. $\phi' > 0$) sier vi at $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ har samme orientering.

Hvis ϕ er strengt avtagende har de motsatt orientering.

Gitt nå $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{A}} \longrightarrow \mathbb{R}$

C kurve i A, $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ to ekvivalente parametriseringer av C

Da har $\int_C f\,ds$ samme verdi uansett hvilke av parametriseringene vi bruker. (Setning 3.3.5)

Bevis

Sett $I_1 = \int_a^b f(\vec{r}_1(t))\, v_1(t)\, dt$

(og I_2 tilsvarende)

$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\phi(t))$, $\vec{r}_1\,'(t) = \vec{r}_2\,'(\phi(t))\phi'(t)$

$v_1(t) = \|\vec{r}_2\,'(\phi(t))\|\, |\phi'(t)| = |\phi'(t)|\, v_2(\phi(t))$

Anta først at ϕ er strengt voksende

så $\phi' > 0$

$$I_1 = \int_a^b f(\vec{r}_2(\phi(t)))\, \phi'(t)\, v_2(\phi(t))\, dt$$

$u = \phi(t)$, $du = \phi'(t)dt$

$$= \int_c^d f(\vec{r}_2(u))\, v_2(u)\, du = I_2$$

Ser at dette gjelder også om $\phi' < 0$

Motivasjon om linjeintegralen av vektorfelter:

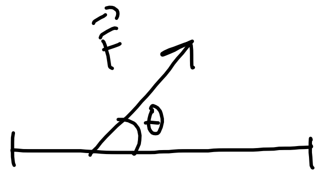
Fysikk:

① W = Arbeid = kraft × vei.

Forutsetter at det virker en konstant kraft i veiens retning

$$W = Fs$$
$$s = (b-a)$$

② Anta kraften danner en vinkel θ mod veistrekning

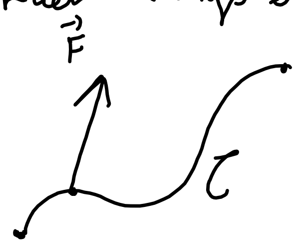


Da får vi

$$W = \|\vec{F}\| \cos\theta \, s$$

Komponenten av kraften i veiens retning × veilengde

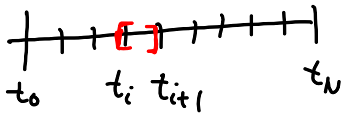
③ Kan ha en varierende kraft som virker langs en kurve i f.eks. $\mathbb{R}^3$



$\vec{r}(t): [a,b] \to \mathbb{R}^3$

par. av C

Deler opp $[a,b]$

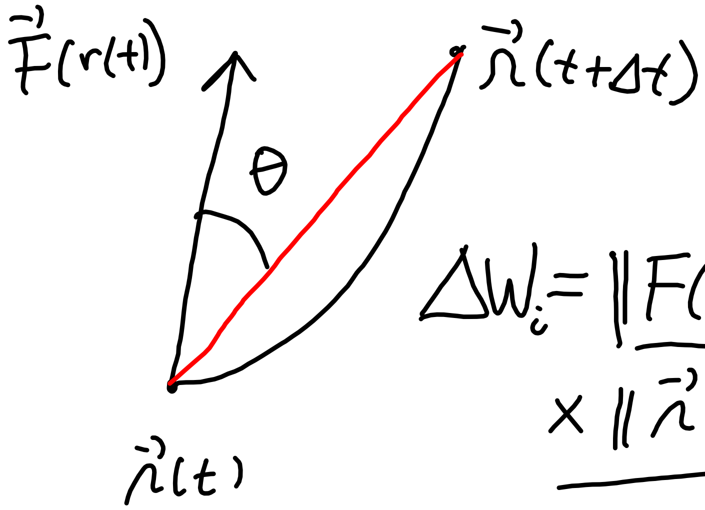


$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$$

Sett $[t_i, t_{i+1}] = [t, t+\Delta t]$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

Kurven over $[t, t+\Delta t]$?



$$\Delta W_i = \underline{\|F(r(t))\| \cos\theta} \times \underline{\|\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\|}$$

$$= \vec{F}(r(t)) \cdot (\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t))$$

$$= \vec{F}(r(t)) \cdot \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \Delta t$$

$$\approx \vec{F}(r(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \Delta t$$

$$W \approx \sum_{i=0}^{N-1} \Delta W_i \approx \sum_{i=0}^{N-1} \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}\,'(t_i) \Delta t$$

$$\xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \, dt$$

Integralet av vektorfeltet $\vec{F}$ langs kurven C.

<u>DEF</u>

Gitt $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$

og kurve C i A parametrisert ved

$\vec{r}: [a,b] \to A$. Så definerer vi:

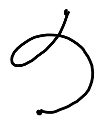
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

(linjeintegralet av $\vec{F}$ langs C).

Eksempel (fra boka)

$$\vec{F}(x,y,z) = -x\vec{i} + yz\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k},\ t \in [0,2\pi]$$



$$\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = -\cos t\,\vec{i} + t\sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = \sin t\cos t + t\sin t\cos t + t$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\sin t\cos t + t\sin t\cos t + t)\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2t\,dt = \Big|_0^{2\pi} -\frac{1}{4}\cos 2t$$

$$= -\frac{1}{4}(1-1) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} t\sin t\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} \underset{v}{t}\ \underbrace{\frac{1}{2}\sin 2t}_{u'}\,dt =$$

$$= \Big|_0^{2\pi} t\left(-\frac{1}{4}\cos 2t\right) - \int_0^{2\pi} 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos 2t\right)dt$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{8}\sin 2t = -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} t\,dt = \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{2}t^2 = 2\pi^2$$

Tilsammen $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underline{2\pi^2 - \frac{\pi}{2}}$

Er linjeintegralet av vektorfelter uavhengig av parametrisering.

Svar Nesten.

F, $r_1(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$r_2(t) : [c,d] \to \mathbb{R}^n$

Anta $r_1(t), r_2(t)$ ekvivalente

dvs $r_1(t) = r_2(\phi(t))$

Anta $\phi' > 0$, $r_1'(t) = r_2'(\phi(t))\phi'(t)$

$$\int_a^b F(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1{}'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}_2(\phi(t))) \cdot r_2'(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

$u = \phi(t)$, $du = \phi'(t)\,dt$

$$= \int_c^d \vec{F}(\vec{r}_2(u)) \cdot r_2'(u)\,du$$

(linjeintegral av $\vec{F}$ regnet ut med r_2) Om $\phi' < 0$

får jeg istedet $\displaystyle\int_d^c \vec{F}(\vec{r}_2(u))\vec{r}_2{}'(u)\,du$

dvs. linjeintegralet av $\vec{F}$ skifter fortegn