Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Sverre O. Smalø Telefon: 73 59 17 50

EKSAMEN I ALGEBRA OG TALLTEORI/ALGEBRA (TMA4150/MA2201)

Bokmål
Dato: Mandag 18. mai 2009
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler:
Enkel kalkulator og utdelt figur.

Sensur: 9. juni.

Settet inneholder 5 oppgaver. Dere skal løse oppgavene 1, 2, 3 og 4 eller 1, 2, 3 og 5.

Oppgave 1

a) Vis at $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_7,\ (a,b) \neq (0,0) \right\}$ er en abelsk gruppe under vanlig matrisemultiplikasjon modulo 7.

b) Avgjør hvilken gruppe på form $\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r^{\alpha_r}}$, der p_i er primtall og α_i er naturlige tall, som G er isomorf med.

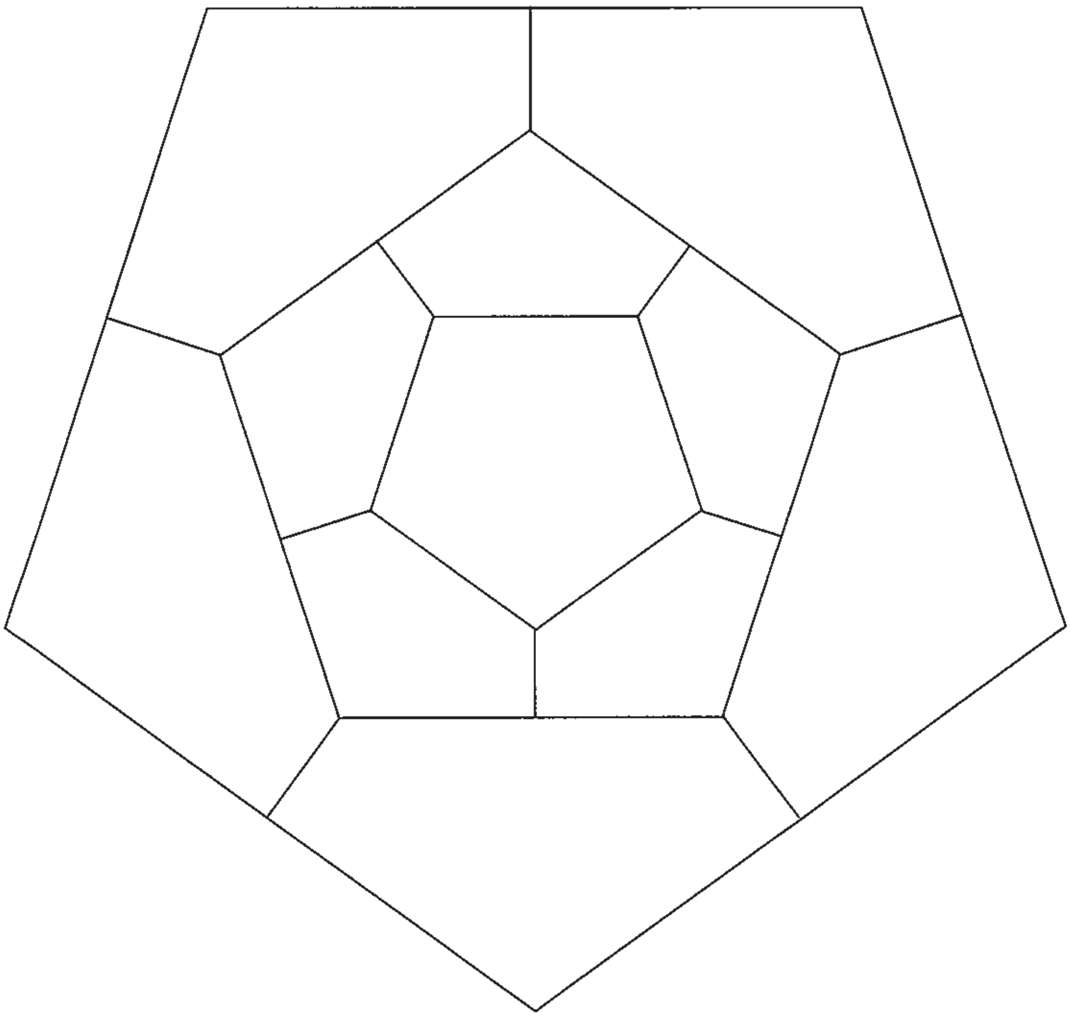
c) Finn alle komposisjonsrekkene til gruppen $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$.

Oppgave 2 La G_1, G_2 og G_3 være grupper og la $\varphi\colon G_1 \to G_2$ og $\psi\colon G_2 \to G_3$ være gruppehomomorfier.

a) Vis at bildet til $\psi \circ \varphi$, $\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)$, er en undergruppe av bildet til ψ, $\mathrm{Im}\,\psi$, og at kjernen til $\psi \circ \varphi$, $\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$, inneholder kjernen til φ, $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

b) Vis at dersom $\varphi\colon G_1 \to G_2$ er en gruppehomomorfi så er bildet til φ, $\mathrm{Im}\,\varphi$, isomorf med gruppen $G_1/\,\mathrm{Ker}\,\varphi$.

Oppgave 3



a) Finn gruppen av symmetrier til denne figuren som en glassplate i rommet.

b) Finn hvor mange fargeleggninger av glassplaten som finnes når det er 4 forskjellige farger tilgjengelig, der to fargeleggninger betraktes som like dersom de kan dreies over i hverandre i rommet.

Oppgave 4

a) Finn alle moniske irreduktible andregradspolynom over $\mathbb{Z}_3$ og alle moniske irreduktible andregradspolynom over $\mathbb{Z}_5$.

b) Vis at $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ under vanlig matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon modulo 3 er en kropp.

c) Vis at $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ under vanlig matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon modulo 5 **ikke** er en kropp.

Oppgave 5 Betrakt gruppen A_5 av like permutasjoner på $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Finn antall Sylow 3-undergrupper og antall Sylow 5-undergrupper.

b) Vis at Sylow 2-undergruppene er isomorfe med $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ og at snittet mellom to forskjellige Sylow 2-undergrupper er trivielt og finn antallet Sylow 2-undergrupper.

c) Vis at dersom H er en ikke-triviell normal undergruppe av A_5 så må H inneholde enten alle 5-sykler og dermed må $H = A_5$, eller alle 3-sykler og dermed må $H = A_5$ eller minst 5 elementer av orden 2 og dermed enten en 3-sykel eller en 5-sykel og igjen at $H = A_5$, dvs. A_5 er en simpel gruppe.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Sverre Smalø (73591750)

EKSAMEN I Algebra og Tallteori (TMA4150)

Mandag 10. august 2009
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 31. august 2009

Hjelpemidler:
Enkel typegodkjent kalkulator og utdelt figur.

Oppgave 1

a) Finn alle undergrupper av $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8$ som er isomorf med $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

b) Finn alle undergrupper av $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8$ som er isomorf med $\mathbb{Z}_8$.

c) Finn tre komposisjonsrekker til $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8$.

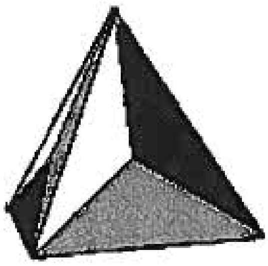
Oppgave 2 Betrakt gruppen $\mathbb{S}_5$ av permutasjoner på $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. La H være en undergruppe av $\mathbb{A}_5$ av orden 3.

a) La H virke på $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ på den naturlige måten ved $\sigma \in H$, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ så er $\sigma \cdot x = \sigma(x)$. Finn antall baner av H i $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ og størrelsen på disse.

b) Finn alle undergrupper av orden 3 i $\mathbb{S}_5$.

c) Finn alle undergrupper av orden 6 i $\mathbb{S}_5$.

Oppgave 3 Betrakt



figuren som består av et tetraeder der hver trekant er delt inn i tre likebenede trekanter.

a) Beskriv gruppen av de 12 stive bevegelser av tetraederet som en gruppe av permutasjoner på de 12 små trekantene.

b) Du har tre farger til rådighet for å fargelegge de 12 småe trekantene. På hvor mange forskjellige måter kan tetraederet fargelegges når to fargelegginger betraktes som identiske dersom de kan dreies over i hverandre.

Oppgave 4

a) Finn alle irreduktible 3-gradspolynom over $\mathbb{Z}_3$ på form $x^3 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{Z}_3$.

b) Betrakt matrisa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_3)$ og definer $\phi : \mathbb{Z}_3[x] \to \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}_3)$ ved

$$\phi(f) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finn kjernen til ϕ. (Det oppgis at ϕ vil være en ringhomomorfi.)

c) Vis at $Im(\phi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a+c & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$

og at dette er en kropp med 27 elementer.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Sverre O. Smalø Telefon: 73 59 17 50

EKSAMEN I ALGEBRA (MA2201)

Bokmål
Dato: Fredag 4. desember 2009
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler:
Enkel kalkulator og utdelt figur.

Sensur: 25. desember.

Settet inneholder 4 oppgaver.

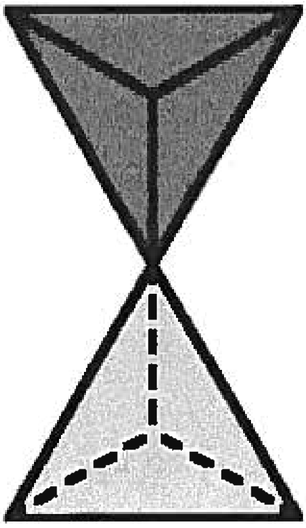
Oppgave 1

a) Betrakt den abelske gruppa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Finn alle undergrupper av orden 2 og av orden 4 i denne gruppa.

b) Vis at dersom G er ei gruppe skrevet multiplikativt slik at $g^2 = 1_G$ for alle g i G der 1_G er identitetselementet i G, så er G abelsk.

c) Vis at dersom G er ei endelig gruppe som i punkt b) så finnes et naturlig tall n slik at $|G| = 2^n$ og at G er isomorf med $\mathbb{Z}_2^n = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ der det er n kopier av $\mathbb{Z}_2$ til høyre for likhetstegnet.

Oppgave 2 Betrakt figuren:



a) Finn gruppa av rotasjonssymmetrier til denne figuren betraktet som et stivt legeme i rommet.

b) Hjørnene i denne figuren inkludet det sentrale hjørnet skal fargelegges der det er 3 farger til rådighet. Hvor mange forskjellige fargede figurer kan dannes når to fargede figurer betraktes som like dersom de kan roteres over i hverandre i rommet.

Oppgave 3 Betrakt gruppa A_4 av alle jamne permutasjoner på mengden $\{1, 2, 3, 4\}$.

a) Finn ei normal undergruppe av A_4.

b) Finn ei komposisjonsrekke til A_4.

Oppgave 4

a) Bruk Sylows teoremer til å vise at alle grupper av orden p^2 er abelske når p er et primtall.

b) Vis at enhver gruppe av orden $11^2 \cdot 13^2$ er abelsk.