4.6.9. • I et indreproduktrom V med norm $\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$ gjelder $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

Bevis:

$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle = \|u\|^2 + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \|$

$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v \rangle = \langle u,u \rangle - \langle u,v \rangle - \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle = \|u\|^2 - \langle u,v \rangle - \langle v,u \rangle + \|$

Legg sammen disse. I oppgave 11 a) skal vi trekke dem fra hverandre.

• Normene i $\mathbb{R}^2$

1) $\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$

2) $\|(x,y)\| = |x| + |y|$

kommer ikke fra indre produkter

Bevis: Skal vise at parallellogramloven ikke holder.

La $u = (1,0)$, $v = (0,1)$, så $u+v = (1,1)$, $u-v = (1,-1)$

Norm 1:

$\|u+v\|^2 = 1 \quad \|u-v\|^2 = 1 \quad \|u\|^2 = 1 \quad \|v\|^2 = 1$

Norm 2:

$\|u+v\|^2 = 4 \quad \|u-v\|^2 = 4 \quad \|u\|^2 = 1 \quad \|v\|^2 = 1.$

4.6.10. Anta $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal i V. Da er projeksjonen $P_{e_1,\dots,e_n}$ lineær.

Bevis: $P_{e_1,\dots,e_n}(u) = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle u, e_n \rangle e$

Denne er lineær i u siden indreproduktet er lineært i første faktor (ii) og iii) i definisjonen av et indre produkt.)

4.6.11

a) Hvis V er et indreprodukt rom over $\mathbb{R}$, så er

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

Bevis: Regningen i 4.6.9 gir

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 2(\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle) = 2(\langle u,v\rangle + \langle u,v\rangle) = 4\langle u,v\rangle$$

Nest ~~siste~~ likhet brukte at det er et reellt vektorrom.

b) Hvis V er et indreprodukt rom over $\mathbb{C}$, så er

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\| - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right)$$

Bevis: Som over er

(*) $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 2(\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle)$. Dette gir

(**) $i\left(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2\right) = 2i\left(\langle u, iv\rangle + \langle iv, u\rangle\right) = 2i\left(-i\langle u,v\rangle + i\langle v,u\rangle\right)$

$$= 2(\langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle)$$

Resultatet følger nå ved å legge sammen (*) og (**).

4.6.12 $S \subset V$, et indre produkt rom. Vi definerer

$$S^\perp = \{u \in V \mid \langle u, s\rangle = 0 \text{ for alle } s \in S\}.$$

a) $S^\perp$ er et lukket underrom.

Bevis: Lett å se at om $u, v \in S^\perp$, så er $u+v \in S^\perp$ og om $\alpha \in \mathbb{K}$, så er $\alpha u \in S^\perp$. Altså er $S^\perp$ et underrom.

Hvis $u_n \in S^\perp$ og $u_n \to u$, så er

$$\langle u, s\rangle = \langle \lim u_n, s\rangle = \lim \langle u_n, s\rangle = 0 \quad \text{for alle } s \in S,$$

altså er $u \in S^\perp$, så $S^\perp$ er lukket.

b) Hvis $S \subset T$ så er $T^{\perp} \subset S^{\perp}$.

Bevis:

Hvis $u \in T^{\perp}$, så er $\langle u, t \rangle = 0$ for alle $t \in T$ og derfor $\langle u, s \rangle = 0$ for alle $s \in S$, altså er $u \in S^{\perp}$.

<u>4.6.13</u> $l_2 = \{ \bar{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \}$

a) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$ er et indreprodukt på l_2.

Bevis: Merk først at for alle følger (x_n), (y_n) og $N \in \mathbb{N}$ gjelder

① $\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| \leq (\sum_{n=1}^{N} x_n^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=1}^{N} y_n^2)^{\frac{1}{2}}$ (Cauchy-Schwarz i $\mathbb{R}^N$)

② $(\sum_{n=1}^{N} (x_n + y_n)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{n=1}^{N} x_n^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{n=1}^{N} y_n^2)^{\frac{1}{2}}$ (Trekantulikheten i $\mathbb{R}$

② viser at l_2 er et vektorrom og ① viser at $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ er absolutt konvergent og derfor konvergent.

Vi sjekker egenskapene til et indreprodukt.

(i) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$

(ii) $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \sum^{\infty} (x_n + y_n) z_n = \sum^{\infty} x_n z_n + \sum^{\infty} y_n z_n =$

$\langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$

(iii) $\langle \alpha \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum^{\infty} \alpha x_n y_n = \alpha \sum x_n y_n = \alpha \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$

(iv) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \sum^{\infty} x_n^2 \geq 0$. Likhet hvis og bare hvis $x_n = 0$ for alle n, dvs. $\bar{x}$ er 0-følgen.

b) l_2 er komplett.

Bevis:

Beviset er temmelig likt beviset for at l_1 er komplett. (Oppgave 4.5.10). La $(\bar{x}^k)$ være en Cauchy-følge i l_2, $\bar{x}^k = (x_m^k)_{m \in \mathbb{N}}$. For hver $m \in \mathbb{N}$ er

$$|x_m^k - x_m^j| \le \Big(\sum_{m=1}^{\infty} (x_m^k - x_m^j)^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|\bar{x}^k - \bar{x}^j\|,$$

altså er $(x_m^k)_{k=1}^{\infty}$ en Cauchy-følge av reelle tall og derfor konvergent, dvs $x_m^k \to x_m$ når $k \to \infty$ for alle m. La $\bar{x} = (x_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Vi skal vise at $\bar{x} \in l_2$ og at $\bar{x}^k \to \bar{x}$ i l_2-norm.

Gitt $\varepsilon > 0$. Siden $(\bar{x}^k)$ er Cauchy i l_2 fins N slik at

$$(*) \quad \|\bar{x}^k - \bar{x}^j\| = \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m^k - x_m^j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{når } k, j \ge N.$$

La $M \in \mathbb{N}$. Siden $x_m^j \to x_m$ når $j \to \infty$ for alle $m \in \mathbb{N}$ fins J slik at $|x_m^j - x_m| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{M}}$ for alle $m \le M$ når $j \ge J$. Hvis $k \ge N$ og $j \ge \max\{N, J\}$ får vi da fra $(*)$ og (2):

$$\Big(\sum_{m=1}^{M} |x_m^k - x_m|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{m=1}^{M} |x_m^k - x_m^j + x_m^j - x_m|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \Big(\sum_{m=1}^{M} |x_m^k - x_m^j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{m=1}^{M} |x_m^j - x_m|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \Big(\sum_{m=1}^{M} \frac{\varepsilon^2}{4M}\Big)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Dette holder for alle $M \in \mathbb{N}$. Derfor har vi

$$\Big(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m^k - x_m|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon \quad \text{når } k \ge N.$$

Det følger at $\bar{x}-\bar{x}^k \in l_2$, altså er $\bar{x} \in l_2$ og

$$\|\bar{x}^k-\bar{x}\|=\Big(\sum^{\infty}(x^k_m-x_m)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

som viser at $\bar{x}^k \to \bar{x}$ i l_2-norm.

c) $\{e_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ er en ortonormal basis for l_2.

Bevis:

Ortonormaliteten er opplagt. Hvis $x \in l_2$ og $\varepsilon > 0$, så fins N slik at $\sum_{m\geq N} x_m^2 < \varepsilon^2$. Det følger at

$$\|x-\sum^{N} x_m e_m\| = \Big(\sum_{m>N} x_m^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$ altså er $x=\sum_{m=1}^{\infty} x_m e_m$ i l_2.

Entydighet er akkurat som i 4.5.6.

d) Hvis V er indreprodukt rom med ortonormal basis $\{v_1, \dots, v_m, \dots\}$ og at for alle $\bar{\alpha}=(\alpha_m)\in l_2$ fins $u \in V$ med $\langle u, v_m\rangle = \alpha_m$ $\forall m$, så er V komplett.

Bevis:

Hvis $u \in V$, så er $\bar{\alpha}=(\langle u, e_m\rangle) \in l_2$ og $\|u\|=\|\bar{\alpha}\|$ (Parseval) Hvis $\bar{u}^k \in V$ er en Cauchy følge i V, så er $\bar{\alpha}^k$ en Cauchy-følge i l_2 og derfor har vi $\bar{\alpha}^k \to \alpha$ i l_2. I følge antagelsen fins $u \in V$ slik at $\langle u, v_m\rangle = \alpha_m$. Men da har vi

$$\|\bar{u}^k-\bar{u}\| = \|\bar{\alpha}^k-\bar{\alpha}\| \to 0 \quad \text{når } k\to\infty.$$

Altså er V komplett.

- Hvis X er en mengde og $\mathcal{A}$ er mengden av alle delmengder av X, så er $\mathcal{A}$ en σ-algebra. Dette forekommer i flere av oppgavene.

<u>5.1.1</u> $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $\mathcal{A}$ = alle delmengder, $\mu(A) = |A|$ = antall elementer i A. (Dette gir $\mu(\emptyset)=0$). Da er $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et målrom.

Bevis:

$\mathcal{A}$ er en σ-algebra og vi må vise at μ er et mål. Hvis $\{A_k\}$ er en følge disjunkte delmengder, må $A_k = \emptyset$ for alle unntatt et endelig antall k. μ er additiv siden antall elementer i en endelig disjunkt union er summen av antall elementer i hver mengde.

<u>5.1.2.</u> X, $\mathcal{A}$ som over. For hver $x \in X$ er gitt vekt $m(x) \geq 0$. Vi definerer $\mu(A) = \sum_{x \in A} m(x)$. Da er $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et målrom.

Bevis:

Må vise at μ er et mål. Hvis $A_1, \cdots, A_m$ er disjunkte, så er

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{x \in \bigcup^m A_k} m(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{x \in A_k} m(x) = \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k).$$

<u>5.1.3</u> $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tellbar mengde, $\mathcal{A}$ = alle delmengder, $\mu(A) = |A|$ ($=\infty$ hvis A er uendelig). Da er $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et målrom.

Bevis:

Må vise at μ er et mål. Anta at $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ er en disjunkt følge av delmengder. Vi har da to mulige tilfeller

1) Minst en av mengdene A_k er uendelig eller $A_k \neq \emptyset$ for uendelig mange k. I begge tilfeller følger det at $\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k\right) = \infty$ og $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \infty$.

2) Alle mengdene A_k er endelige og bare et endelig antall A_k er ikke-tomme. Da følger det at $\mu(\bigcup^\infty A_k) = \sum^\infty \mu(A_k)$ som i oppgave 5.1.1.

<u>5.1.4.</u> X en vilkårlig mengde, $\mathcal{A}$ = alle delmengder, $a \in X$. Vi definerer $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } a \in A \\ 0 & \text{hvis } a \notin A. \end{cases}$ Da er $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et målrom.

Bevis:

Viser at μ er et mål. Anta at $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en disjunkt følge av delmengder. Har to tilfeller

1) $a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Da er $a \in A_n$ for nøyaktig en n, altså er

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1 \quad \text{og} \quad \sum^\infty \mu(A_n) = 1$$

2) $a \notin \bigcup A_n$. Da er ikke $a \in A_n$ for noen n og vi har

$$\mu(\bigcup A_n) = 0 \quad \text{og} \quad \sum^\infty \mu(A_n) = 0.$$

<u>5.1.5</u> X = {alle myntkast av lengde n}, $\mathcal{A}$ = alle delmengder og $\mu(A) = \frac{|A|}{2^n}$. Da er $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et målrom.

Bevis:

μ er bare tellemålet (5.1.1) delt på 2^n og er derfor et mål.

<u>5.1.6.</u> $X = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ for alle } i\}$. Vi har $|X| = 6^n$. La $\mathcal{A}$ = alle delmengder. Målet $\mu(A) = \frac{|A|}{6^n}$ angir da sannsynligheten for at en sekvens av n terningkast skal tilhøre mengden A.

5.1.7. Hvis μ, ν er to mål på $(X, \mathcal{A})$ og $\alpha, \beta \geq 0$, så er

$$\lambda(A) = \alpha\mu(A) + \beta\nu(A)$$

et mål på $(X, \mathcal{A})$.

Bevis:

Vi har

(i) $\lambda(\emptyset) = \alpha\mu(\emptyset) + \beta\nu(\emptyset) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$.

(ii) Hvis $\{A_n\}$ er en disjunkt følge av mengder i $\mathcal{A}$, så er

$$\lambda\left(\bigcup^{\infty} A_n\right) = \alpha\mu\left(\bigcup^{\infty} A_n\right) + \beta\nu\left(\bigcup^{\infty} A_n\right) = \alpha\sum^{\infty}\mu(A_n) + \beta\sum^{\infty}\nu(A_n)$$

$$= \sum^{\infty} \alpha\mu(A_n) + \beta\nu(A_n) = \sum^{\infty} \lambda(A_n)$$

5.1.8 Hvis $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er et målrom, $A \in \mathcal{A}$ og $\mu_A : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er definert ved

$$\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$$

så er $(X, \mathcal{A}, \mu_A)$ et målrom.

Bevis:

Må vise at μ_A er et mål, siden vi allerede vet at $\mathcal{A}$ er en σ-algebra.

(i) $\mu_A(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Hvis $\{B_n\}$ er disjunkt følge i $\mathcal{A}$, så er også $\{A \cap B_n\}$ en disjunkt følge i $\mathcal{A}$. Da har vi

$$\mu_A\left(\bigcup^{\infty} B_n\right) = \mu\left(A \cap \bigcup^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup^{\infty}(A \cap B_n)\right) = \sum^{\infty} \mu(A \cap B_n)$$

$$= \sum^{\infty} \mu_A(B_n)$$

5.1.9 • Anta at X er overtellbar og la

$$\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A \text{ eller } A^c \text{ er tellbar}\}$$

Da er $\mathcal{A}$ en σ-algebra.

Bevis:

(i) Vi har $\emptyset \in \mathcal{A}$ siden $\emptyset$ er tellbar.

(ii) Det er opplagt at hvis $A \in \mathcal{A}$, så er $A^c \in \mathcal{A}$ siden $(A^c)^c = A$.

(iii) La $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge i $\mathcal{A}$. Vi har to tilfeller:

1) Minst en A_n har tellbart komplement, la oss si A_{n_0}.
Da er
$$\left(\bigcup^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap^{\infty} A_n^c \subset A_{n_0}^c$$
altså er $\left(\bigcup^{\infty} A_n\right)^c$ tellbar.

2) Alle A_n, $n \in \mathbb{N}$ er tellbar. Da er $A = \bigcup^{\infty} A_n$ en tellbar union av tellbare mengder og derfor tellbar.

• Vi definerer
$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } A \text{ er tellbar} \\ 1 & \text{hvis } A^c \text{ er tellbar.} \end{cases}$$

Bevis: La $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ være en disjunkt følge i $\mathcal{A}$. Vi ser på de to tilfellene over:

1) $\mu\left(\bigcup^{\infty} A_n\right) = 1$ siden $\left(\bigcup^{\infty} A^n\right)^c$ er tellbar.
Hvis $k \neq n_0$, så er $A_k \subset A_{n_0}^c$ siden $A_k \cap A_{n_0} = \emptyset$. Altså er A_k tellbar og $\mu(A_k) = 0$, så
$$\sum^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_{n_0}) = 1.$$

2) $A = \bigcup^{\infty} A_n$ er tellbar, så $\mu\left(\bigcup^{\infty} A_n\right) = 0$. Dessuten er $\mu(A_n) = 0$ for alle n, så $\sum^{\infty} \mu(A_n) = 0$.