- Det er vanlig å betegne mengden av alle delmengder av en mengde X med 2^X.

<u>5.1.10</u> $(X, \mathcal{A})$ målbart rom, $f: X \to Y$. La

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

Da er $\mathcal{B}$ en σ-algebra.

Bevis:

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$ siden $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Hvis $B \in \mathcal{B}$, så er $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{A}$ siden $\mathcal{A}$ er en σ-algebra, altså er $B^c \in \mathcal{B}$

(iii) Hvis $B_n \in \mathcal{B}$, så er

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A},$$

altså er $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$

<u>5.1.11</u> $(X, \mathcal{A})$ målbart rom, $f: Y \to X$. Da er

$\mathcal{B} = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ en σ-algebra.

Bevis:

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$ siden $\emptyset \in A$ og $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$.

(ii) Hvis $B \in \mathcal{B}$, $B = f^{-1}(A)$, så er $B^c = f^{-1}(A^c)$, altså er $B^c \in \mathcal{B}$.

(iii) Hvis $B_n \in \mathcal{B}$, $B_n = f^{-1}(A_n)$, så er

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big),$$ altså er $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$.

5.1.12 Anta X en mengde og $\mathcal{A} \subset 2^X$ slik at

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$

b) Hvis $A \in \mathcal{A}$, så er $A^c \in \mathcal{A}$.

c) Hvis $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ er en følge i $\mathcal{A}$, så er $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Bevis:

Vi må bare vise (iii). Anta at $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Da er $A_n^c \in \mathcal{A}$, så $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{A}$. Men $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c$, så b) gir at

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

5.1.13 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ kalles atomløst hvis $\mu(\{x\}) = 0$ for alle $x \in X$. Vis at da er $\mu(A) = 0$ for alle tellbare mengder A.

Bevis:

A er på formen $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$ og proposisjon 5.1.4 d) gir at

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

5.1.14 Hvis μ er mål på $\mathbb{R}$ slik at $\mu([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]) = 1 + \frac{2}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, så er $\mu(\{0\}) = 1$.

Bevis:

Vi har $\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, så proposisjon 5.1.5. b gir at

$$\mu(\{0\}) = \lim_{n \to \infty} \mu([-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}]) = \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{2}{n} = 1.$$

5.1.15. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er et målrom slik at for hver $n \in \mathbb{N}$ fins en mengde $A_n \in \mathcal{A}$ med $n \leq \mu(A) < \infty$. Da fins en mengde $B \in \mathcal{A}$ slik at $\mu(B) = \infty$.

Bevis:

La $B_m = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$. Da er $B_m \in \mathcal{A}$ og $A_m \subset B_m$, så $\mu(B_m) \geq m$.

Videre er $B_m \subset B_{m+1}$, så med $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ gir 5.1.5 a) at

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m) = \infty.$$

<u>5.1.16</u> Hvis μ er et mål på $\mathbb{R}$ slik at $\mu([a,b]) = b-a$ for alle lukkede intervaller $[a,b]$, $a<b$. Da er $\mu((a,b)) = b-a$ også for alle åpne intervaller. Det omvendte er også sant.

Bevis:

$$(a,b) = [a-1, b+1] \setminus \left([a-1,a] \cup [b, b+1]\right)$$

5.1.4. c) gir da at

$$\mu((a,b)) = \mu([a-1,b+1]) - \left(\mu([a-1,a]) + \mu([b,b+1])\right)$$
$$= (b+1)-(a-1) - (1+1) = b-a.$$

Det omvendte følger av

$$[a,b] = (a-1, b-1) \setminus \left((a-1,a) \cup (b, b+1)\right)$$

<u>5.1.17</u> $\mathcal{A} \subset 2^X$ kalles en <u>algebra</u> hvis

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) Hvis $A, B \in \mathcal{A}$, så er $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Vis at

a) Hvis $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, så er $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$.

Bevis: Sant for $n=1$ og $n=2$. Anta sant opp til n og la $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$. Da er $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$ ved induksjonshypotesen og $A_{n+1} \in \mathcal{A}$. Da gir (iii) at

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n+1} = (A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1} \in \mathcal{A}.$$

b) Hvis $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, så er $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}$.

Bevis:

Vi har at $A_i^c \in \mathcal{A}$ fra (ii), så a) gir at

$(A_1 \cap \dots \cap A_n)^c = A_1^c \cup \dots \cup A_n^c \in \mathcal{A}$. Dermed gir (ii)

igjen at $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}$.

c) La $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ eller } A^c \text{ er endelig}\}$. Da er $\mathcal{A}$ en algebra, men ingen σ-algebra.

Bevis:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ siden $\emptyset$ er endelig.

(ii) Pga symmetri er $A^c \in \mathcal{A}$ når $A \in \mathcal{A}$.

(iii) Hvis $A, B \in \mathcal{A}$ har vi to tilfeller

(1) A og B er begge endelige. Da er $A \cup B$ endelig

(2) Minst en av mengdene A^c, B^c er endelig. Da er $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ også endelig.

Altså er $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Ikke σ-algebra: La $A_n = \{2n\}$. Da er $A_n \in \mathcal{A}$, men

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \notin \mathcal{A}$ siden A består av partallene og

A^c av oddetallene; begge to er uendelige.

d) Hvis $\mathcal{A}$ er en algebra slik at $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ for enhver <u>disjunkt</u> følge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathcal{A}$, så er $\mathcal{A}$ en σ-algebra.

Bevis:

Vi må vise at $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ for enhver følge (ikke nødvendigvis disjunkte) i $\mathcal{A}$.

La $B_1 = A_1$ og $B_2 = A_2 \cap B_1^c$. Da er $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ (fra iii) og b)), $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ og $B_1 \cup B_2 = A_1 \cup A_2$. Vi fortsetter induktivt og setter
$$B_n = A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\right)^c \text{ for } n \geq 3.$$

Det følger at $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er disjunkte og at $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ for alle n. Dette gir at
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Altså er $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

<u>5.1.18</u> Anta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ målrom, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en følge i $\mathcal{A}$ og $\sum \mu(A_n) < \infty$. La $A = \{x \in X \mid x \in A_n \text{ for uendelig mange } n\}$.
Da er $A \in \mathcal{A}$ og $\mu(A) = 0$

Bevis:

Vi har at $A = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right)$. Siden $\mathcal{A}$ er σ-algebra, vil

$B_m = \bigcup_{k\geq m} A_k \in \mathcal{A}$ og dermed også $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$. Videre er

$B_{m+1} \subset B_m$ og $\mu(B_m) \leq \sum_{k\geq m} \mu(A_k) \to 0$ når $m \to \infty$.

5.1.5 b) gir da

$$\mu(A) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m) = 0$$

5.2.1 • $X = \{0,1,2\}$
• $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{0,1\}, \{2\}, X\}$.

a) $\mathcal{A}$ er en σ-algebra.

Bevis:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ O.K.

(ii) $\emptyset^c = X \in \mathcal{A}$, $\{0,1\}^c = \{2\} \in \mathcal{A}$, $\{2\}^c = \{0,1\} \in \mathcal{A}$, $X^c = \emptyset \in \mathcal{A}$. O.K.

(iii) Siden $\{0,1\} \cup \{2\} = X$, er enhver union av mengder i $\mathcal{A}$ også med i $\mathcal{A}$.

b) $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ er gitt ved $\mu(\emptyset) = \mu(\{0,1\}) = 0$ og $\mu(\{2\}) = \mu(X) = 1$. μ er et mål.

Bevis:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ O.K.

(ii) Den eneste ikke-trivielle disjunkte union er $\{0,1\} \cup \{2\} = X$.
Vi har $\mu(\{0,1\}) + \mu(\{2\}) = 0 + 1 = 1 = \mu(X)$.

c) Vis at μ ikke er komplett og beskriv kompletteringen $\bar{\mu}$.

Svar:

μ er ikke komplett, siden $\{0\}$ og $\{1\}$ begge er nullmengder, men ikke med i $\mathcal{A}$. Det betyr at alle singletonene $\{0\}$, $\{1\}$ og $\{2\}$ er i $\bar{\mathcal{A}}$ og dermed alle delmengder av X, dvs. $\bar{\mathcal{A}} = 2^X$. Det er også klart at

$$\bar{\mu}(A) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } 2 \notin A \\ 1 & \text{hvis } 2 \in A \end{cases}$$

dvs et mål som i eksempel 5.1.4.

5.2.3 Anta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ komplett målrom, $A, B \in \mathcal{A}$ med $\mu(A) = \mu(B) < \infty$. Vis at om $A \subset C \subset B$, så er $C \in \mathcal{A}$.

Bevis:

Vi har $\mu(B \setminus A) = 0$ og $C \setminus A \subset B \setminus A$, altså er $C \setminus A \in \mathcal{N}$.
Men da er $A \cup (C \setminus A) = C \in \mathcal{A}$ siden rommet er komplett.

5.2.4 Anta $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^X$, $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{B})$ og $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{A})$. Da er $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B})$.

Bevis: $\sigma(\mathcal{A})$ er den minste σ-algebraen som inneholder $\mathcal{A}$.
Siden $\sigma(\mathcal{B})$ også er en σ-algebra som inneholder $\mathcal{A}$ gir dette at $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$. På samme måte får vi at $\sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Altså er de like.

5.2.5. X metrisk rom, $\mathcal{G} = \{$åpne mengder i $X\}$, $\mathcal{F} = \{$lukkede mengder i $X\}$. Da er $\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{F})$.

Bevis:

Enhver åpen mengde er komplementet til en lukket mengde, så $\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{F})$. Omvendt er enhver lukket mengde komplementet til en åpen mengde, så $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{G})$.
Resultatet fölger nå av forrige oppgave.

5.2.6. Vis at for enhver familie $\mathcal{B} \subset 2^X$ fins en minste algebra $\mathcal{A}$ som inneholder $\mathcal{B}$. (Definisjon av algebra i 5.1.17)

Bevis:

La $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A$ tilhörer enhver algebra som inneholder $\mathcal{B}\}$.

2^X er en algebra som inneholder $\mathcal{B}$, så slike finnes.

Det er klart at enhver algebra som inneholder $\mathcal{B}$ vil inneholde $\mathcal{A}$, så vi må vise at $\mathcal{A}$ er en algebra.

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ siden $\emptyset$ er med i enhver algebra (og dermed spesielt de som inneholder $\mathcal{B}$.)

(ii) Hvis $A \in \mathcal{A}$, så tilhører også A^c enhver algebra som inneholder $\mathcal{B}$, altså $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Hvis $A, B \in \mathcal{A}$, så tilhører også $A \cup B$ enhver algebra som inneholder $\mathcal{B}$, altså $A \cup B \in \mathcal{A}$.

<u>5.2.7</u> En <u>monoton klasse</u> er en familie $\mathcal{M} \subset 2^X$ slik at

(i) Hvis $\{A_n\}$ er en voksende følge i $\mathcal{M}$ $(A_n \subset A_{n+1})$, så er $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

(ii) Hvis $\{A_n\}$ er en avtagende følge i $\mathcal{M}$ $(A_{n+1} \subset A_n)$, så er $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Hvis $\mathcal{B} \subset 2^X$, så fins en minste monoton klasse som inneholder $\mathcal{B}$.

Bevis: 2^X er en monoton klasse som inneholder $\mathcal{B}$, så vi kan definere:

$$\mathcal{M} = \{A \subset X \mid A \text{ tilhører enhver monoton klasse som inneholder } \mathcal{B}\}.$$

Akkurat som i 5.2.6, vil $\mathcal{M}$ arve de to egenskapene (i) og (ii) pr. def.