5.3.1 Hvis $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ er målbar, så er $f^{-1}(\{-\infty\})$ og $f^{-1}(\{\infty\})$ begge målbare.

Bevis:

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = f^{-1}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [-\infty, -n)\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([-\infty,-n)) \in \mathcal{A}$$

$$f^{-1}(\{\infty\}) = f^{-1}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (n, \infty]\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}((n,\infty]) \in \mathcal{A}.$$

Vi har her brukt at et tellbart snitt av målbare mengder er målbar og dessuten Prop. 5.3.3.

5.3.2

$$f^{-1}((-\infty, r)) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (r-n, r)\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}((r-n,r)) \in \mathcal{A}.$$

$$f^{-1}((-\infty, r]) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (r-n, r]\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}((r-n,r]) \in \mathcal{A}$$

$$f^{-1}([r, \infty)) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [r, r+n)\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([r,r+n)) \in \mathcal{A}.$$

$$f^{-1}((r, \infty)) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (r, r+n)\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}((r,r+n)) \in \mathcal{A}$$

$$f^{-1}((-\infty, \infty)) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n)\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}((-n,n)) \in \mathcal{A}.$$

5.3.5 Hvis $f_1, \dots, f_n$ er målbare med verdier i $\mathbb{R}$, så er $f_1 + \dots + f_n$ og $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$ målbare

Bevis: Induksjon på n. Sant for $n=1$ og $n=2$ (Prop 5.3.7). Anta sant for $n-1 \geq 2$. Da er

$f_1 + \cdots + f_n = (f_1 + \cdots + f_{n-1}) + f_n$ målbar siden $f_1 + \cdots + f_{n-1}$

er målbar ved induksjonshypotesen og Prop. 5.3.7. Samme argument virker for
$f_1 f_2 \cdots f_n = (f_1 f_2 \cdots f_{n-1}) f_n$

5.3.6. Indikatorfunksjonen til $A \subset X$ er gitt ved

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in A \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(Kalles også karakteristisk funksjon for A)

a) $\mathbb{1}_A$ er målbar $\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$.
Bevis: Dette følger av Prop 5.3.4 (iii) og

$$\mathbb{1}_A^{-1}((r, \infty]) = \begin{cases} \emptyset & \text{hvis } r \geq 1 \\ A & \text{hvis } 0 \leq r < 1 \\ X & \text{hvis } r < 0 \end{cases}$$

Dette er jo målbart for alle $r \in \mathbb{R}$ hvis og bare hvis A er målbar.

b). En enkel funksjon er på formen $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$ der $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ og $A_i \in \mathcal{A}$.
Alle enkle funksjoner er målbare.
Bevis: $a_i \mathbb{1}_{A_i}$ er målbar fra a)-delen. Da blir f målbar pga. oppgave 5.3.5.

5.3.7 Hvis $f : X \to \mathbb{R}$ er målbar, så er $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ for alle Borelmengder B.

Bevis: La

$$\mathcal{B} = \{ B \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$

Da er $\mathcal{B}$ en σ-algebra (Oppgave 5.1.10) som inneholder alle de åpne mengdene (Prop. 5.3.3). Siden Borelmengdene $\mathcal{B}'$ er den minste σ-algebraen som inneholder de åpne mengdene, har vi at $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, dvs.

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \text{ for alle } B \in \mathcal{B}'.$$

5.3.8 Hvis $\{E_n\}$ er en disjunkt følge målbare mengder slik at $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = X$ og $\{f_n\}$ er en følge målbare funksjoner, så er

f definert ved $f(x) = f_n(x)$ når $x \in E_n$

også målbar.

Bevis: Vi har

$$V_n := \{ x \in E_n \mid f_n(x) < r \} = E_n \cap f^{-1}([-\infty, r)) \text{, altså målbar}$$

og

$$f^{-1}([-\infty, r)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \text{, altså målbar.}$$

5.3.11 $f \sim g$ hvis f og g er målbare og $f = g$ n.o., dvs. $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ har mål 0. Dette er en ekvivalensrelasjon.

Bevis:

- $f \sim f$ siden $\{x \mid f(x) \neq f(x)\} = \emptyset$ har mål 0.

- $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ opplagt.

- Hvis $f \sim g$ og $g \sim h$, så er $f \sim h$ siden

$$\{x \mid f(x) \neq h(x)\} \subset \{x \mid f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \mid g(x) \neq h(x)\}.$$

Mengden til høyre har mål 0.

5.3.13 Hvis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ er målbar og endelig n.o. og $f' : X \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis } f(x) \text{ er endelig} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

så er f' målbar og $f' = f$ n.o.

Bevis:

$$\{x \mid f'(x) < r\} = \begin{cases} f^{-1}([-\infty, r)) \cup f^{-1}(\{+\infty\}) & \text{hvis } r > 0 \\ f^{-1}((-\infty, r)) & \text{hvis } r \leq 0 \end{cases}$$

I begge tilfeller er dette en målbar mengde, altså er f' målbar. Videre er

$$\{x \mid f'(x) \neq f(x)\} = \{x \mid f(x) = \pm\infty\}$$ som har mål 0.

5.4.1 Hvis $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ er målbar, så er nivåmengdene $A_a = \{x \in X \mid f(x) = a\}$ målbare for alle $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Bevis: For $a \in \mathbb{R}$ har vi $A_a = f^{-1}(\{a\}) = f^{-1}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})\right)$

$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}\left((a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})\right) \in \mathcal{A}$. For $a = \pm\infty$ er dette oppgave 5.3.1.

5.4.2 Sjekk at $\int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$ for alle $A \in \mathcal{A}$.

Svar: Vi har $n = 1$, $a_1 = 1$, så $\int \mathbb{1}_A \, d\mu = 1 \cdot \mu(A) = \mu(A)$.

5.4.4 Hvis $f_1, \cdots, f_n$ er enkle funksjoner, så er også

$g(x) = \max\{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}$ og

$h(x) = \min\{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}$ enkle funksjoner

Bevis:

- $g(x)$ er målbar, siden

$$\{g(x) < r\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{f_i(x) < r\}$$

Dessuten har $g(x)$ ingen andre verdier enn $f_1, f_2, \cdots, f_n$ har, og det er endelig mange.

- Samme argument som for g, i det vi bruker

$$\{h(x) < r\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{f_i(x) < r\}.$$

5.4.5 μ Lebesgue mål, $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Da er $\int \mathbb{1}_A \, d\mu = 0$
($\mathbb{1}_A$ er ikke Riemann integrerbar)

Bevis: A er tellbar, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$. Siden $\{x_n\}$ er målbar og $\mu(\{x_n\}) = 0$ følger det at A er målbar og $\mu(A) = 0$.
Resultatet følger da fra 5.4.2.

5.4.6. $f \geq 0$ enkel funksjon på $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Da er

$$\nu(B) = \int_B f \, d\mu$$ et mål på $(X, \mathcal{A})$.

Bevis: Hvis $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, så er

$$\nu(B) = \int_B f \, d\mu = \int \mathbb{1}_B f \, d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i \cap B} = \sum_{i=1}^{n} \int a_i \mathbb{1}_{A_i \cap B}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap B)$$ som er et mål i følge oppgave 5.1.8.