2/5

5.7.1 $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ er et vektorrom.

Bevis:

Det er nok å vise at om $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $c \in \mathbb{R}$, så er $f+g$ og cf i $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Men dette er jo innholdet i Proposisjon 5.6.4.

5.7.3 Vi definerer en ekvivalensrelasjon $\sim$ i $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ved: $f \sim g$ hvis $f = g$ n.o. Ekvivalensklassene er definert ved $[f] = \{g \mid g \sim f\}$.

a) To ekvivalensklasser er enten like eller disjunkte.

Bevis:

Dette er sant for enhver ekvivalensrelasjon. I oppgave 5.3.11 viste vi at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

b) Hvis $f \sim f'$, $g \sim g'$ og $c \in \mathbb{R}$ så er $f+g \sim f'+g'$ og $cf \sim cf'$

Bevis:

$$\{x \mid (f+g)(x) \neq (f'+g')(x)\} \subset \{x \mid f(x) \neq f'(x)\} \cup \{x \mid g(x) \neq g'(x)\}$$

$$\{x \mid cf(x) \neq cf'(x)\} \subset \{x \mid f(x) \neq f(x)\} \quad \text{(Likhet hvis } c \neq 0\text{)}$$

Mengden til høyre har mål 0 og derfor også de til venstre.

c) Hvis $f \sim g$, så er $\|f-g\|_1 = 0$ og $\|f\|_1 = \|g\|_1$

Bevis:

Hvis $f = g$ n.o., så er også $|f-g| = 0$ n.o. og $|f| - |g| = 0$ n.o. Dette gir

$$\|f-g\|_1 = \int |f-g| \, d\mu = 0 \quad \text{og} \quad \|f\|_1 - \|g\|_1 = \int |f| - |g| \, d\mu = 0.$$

d) $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ er et normert vektorrom når vi definerer skalar multiplikasjon, addisjon og norm ved

(i) $c[f] = [cf]$

(ii) $[f] + [g] = [f+g]$

(iii) $|[f]|_1 = \|f\|_1$

Hvorfor trenger vi (a), (b), (c) før vi kan gjøre disse definisjonene?

Svar:

Vi trenger (b) for at skalar multiplikasjon og addisjon skal være veldefinerte, dvs. ikke avhenge av valg av representant. Vi trenger (c) for at normen i L^1 skal være veldefinert. (a) trengs strengt tatt ikke.

Dette viser at L^1 er et vektorrom. Vi må vise at $|\ \ |_1$ er en norm.

(i) $|[f]|_1 = \|f\|_1 = \int |f| \, d\mu \geq 0$. Vi har likhet hvis og bare hvis $f = 0$ n.o., dvs. $[f] = [0]$, som er 0-elementet i L^1.

(ii) $|\alpha[f]|_1 = |[\alpha f]|_1 = \|\alpha f\|_1 = |\alpha| \, \|f\|_1 = |\alpha| \, |[f]|_1$.

(iii) $|[f]+[g]|_1 = |[f+g]|_1 = \|f+g\|_1 = \int |f+g| \, d\mu \leq \int |f| + |g| \, d\mu$

$= \|f\|_1 + \|g\|_1 = |[f]|_1 + |[g]|_1$.

5.7.4. $X = \{1, 2, \dots, d\}$, $\mathcal{A} = 2^X$, μ = tellemål. Da er $|f|_2 = (\sum_{i=1}^{d} f(i)^2)^{\frac{1}{2}}$ og forklar at L^2 er essensielt det samme som $\mathbb{R}^d$ med vanlig metrikk.

Svar:

Vi har at $L^2 = \mathcal{L}^2$, for hvis $f \sim g$, dvs $f = g$ n.o., må $f = g$. Enhver funksjon $f: X \to \mathbb{R}$ er enkel og

$$|f|_2 = \|f\|_2 = \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{d} |f(i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vi kan identifiere L^2 med $\mathbb{R}^d$ ved at f identifiseres med $\bar{x} = (f(1), f(2), \cdots, f(d)) \in \mathbb{R}^d$. Vi ser at $|f|_2 = \|\bar{x}\|$, den vanlige normen i $\mathbb{R}^d$.

5.7.5. $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^X$, μ = tellemål. Da er $L^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \mid \sum f(n)$ er absolutt konvergent$\}$ og $|f|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$

Bevis:

$L^1 = \mathcal{L}^1$ siden $f = g$ n.o $\Leftrightarrow f = g$. Hvis $f_k(n) = \begin{cases} |f(n)| & \text{når } n \leq k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

så er $\{f_k\}$ en voksende følge enkle funksjoner og $f_k \to |f|$ når $k \to \infty$. Monoton konvergens teorem gir da

$$\int |f| \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |f(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|.$$

Dette viser at $\int |f| d\mu < \infty$ hvis og bare hvis $\sum^{\infty} f(n)$ er absolutt konvergent og at $|f|_1 = \int |f| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$.

- $L^2(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \mid \sum_{n=1}^{\infty} f(n)^2 < \infty\}$ og $|f|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Bevis:

Som over får vi

$$\int |f|^2 d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k^2 \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f(n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)^2.$$

Vi får $|f|_2 = \left(\int |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum^{\infty} f(n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

5.7.6. Egenskapene (i), (ii) og (iii) i Proposisjon 5.7.4 følger direkte av proposisjon 5.6.4. For $f \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ har vi

$$\langle f, f \rangle = \int f^2 \, d\mu \geq 0$$ siden $f^2 \geq 0$. Vi har likhet hvis og bare hvis $f^2 = 0$ n.o, dvs $f = 0$ n.o.

5.7.7. Anta $\mu(X) < \infty$. Alle funksjoner i denne oppgaven er målbare og ikke-negative. Notasjon:

$$\{f > M\} = \{x \in X \mid f(x) > M\}.$$

a) f er integrerbar hvis og bare hvis det fins $M \in \mathbb{R}$ slik at $\int_{\{f>M\}} f \, d\mu < \infty$.

Bevis: Hvis f er integrerbar, så er $\int_{\{f>-1\}} f \, d\mu = \int f \, d\mu < \infty$.

Hvis $\int_{\{f>M\}} f \, d\mu < \infty$, så er

$$\int f \, d\mu = \int_{\{f \leq M\}} f \, d\mu + \int_{\{f>M\}} f \, d\mu \leq M \cdot \mu(X) + \int_{\{f>M\}} f \, d\mu < \infty$$

altså er f integrerbar.

b) Hvis f er integrerbar, så er $\lim_{M \to \infty} \int_{\{f>M\}} f \, d\mu = 0$.

Bevis: Vi har $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f > n\} = \{x \mid f(x) = \infty\} = N$. Siden f er integrerbar, har N mål 0. Videre vil $\lim f \mathbb{1}_{\{f>n\}} = f \mathbb{1}_N$ og $|f \mathbb{1}_{\{f>n\}}| \leq f$. LDKT gir da

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\{f>n\}} f \, d\mu = \lim \int f \mathbb{1}_{\{f>n\}} \, d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_N \, d\mu = 0.$$

c) Hvis $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ og $M \in \mathbb{R}$, så er

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{f_n > M\}} f_n(x) \geq \mathbb{1}_{\{f>M\}} f(x).$$

Bevis: Hvis $f(x) \leq M$ er høyre side lik 0 og ulikheten automatisk oppfylt. Hvis $f(x) > M$ og $\varepsilon > 0$ er slik at $f(x) - \varepsilon > M$, så fins N slik at når $n \geq N$, så er $f_n(x) > f(x) - \varepsilon > M$ og derfor $\mathbb{1}_{\{f_n > M\}}(x) f_n(x) = f_n(x) > f(x) - \varepsilon$. Altså er $\liminf \mathbb{1}_{\{f_n>M\}} f_n(x) \geq \mathbb{1}_{\{f>M\}} f(x) - \varepsilon$. Siden ε var vilkårlig liten følger ulikheten.

d) Hvis $\lim f_n = f$, $M \in \mathbb{R}$ og $\int_{\{f_n>M\}} f_n \, d\mu \leq \alpha$ for alle n,

så er $\int_{\{f>M\}} f \, d\mu \leq \alpha$.

Bevis: Fatou's lemma gir

$$\int_{\{f>M\}} f \, d\mu = \int \mathbb{1}_{\{f>M\}} f \, d\mu \leq \int \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{f_n>M\}} f \, d\mu \overset{(F)}{\leq}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_{\{f_n>M\}} f \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_{\{f_n>M\}} f \, d\mu \leq \alpha.$$

e) Hvis $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en <u>uniformt integrerbar</u> følge ($\lim_{M\to\infty} (\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{f_n>M\}} f_n \, d\mu) = 0$) og $\lim f_n = f$, så er f integrerbar.

Bevis:

Det fins M slik at $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{f_n>M\}} f_n \, d\mu \leq 1$. Fra d) har vi at $\int_{\{f>M\}} f \, d\mu \leq 1$ og a) gir da at f er integrerbar.

f) Hvis $\{f_n\}$ er som i e), så konvergerer f_n mot f i L^1-norm, dvs.

$$\|f-f_n\|_{L^1(\mu)} = \int |f-f_n|\,d\mu \to 0 \text{ når } n\to\infty.$$

Bevis:

La $\epsilon>0$ og velg M så stor at $\int_{\{f_n>M\}} f_n\,d\mu \le \frac{1}{3}\epsilon$. d) gir at $\int_{\{f>M\}} f\,d\mu \le \frac{1}{3}\epsilon$. Vi definerer

$$\tilde{f}_n(x) = \min(f_n(x), M).$$

Da vil

$$f(x)-\tilde{f}_n(x) \to \begin{cases} 0 & \text{hvis } f(x)\le M \\ f(x)-M & \text{hvis } f(x)>M \end{cases}$$

Dessuten er $|f(x)-\tilde{f}_n(x)| \le \max\{|f(x)|, M\}$, som er integrerbar. LDKT gir da

$$\lim \int |f(x)-\tilde{f}_n(x)|\,d\mu = \int_{\{f>M\}} (f(x)-M)\,d\mu \le \int_{\{f>M\}} f(x)\,d\mu \le \frac{1}{3}\epsilon.$$

Altså fins N slik at $\int |f(x)-\tilde{f}_n(x)|\,d\mu < \frac{2}{3}\epsilon$ når $n\ge N$.
Vi har også

$$\int |\tilde{f}_n(x)-f_n(x)|\,d\mu = \int_{\{f_n>M\}} (f_n(x)-M)\,d\mu \le \int_{\{f_n>M\}} f_n\,d\mu \le \frac{1}{3}\epsilon.$$

For $n\ge N$ har vi da

$$\int |f-f_n|\,d\mu = \int |f-\tilde{f}_n+\tilde{f}_n-f|\,d\mu \le$$

$$\int |f-\tilde{f}_n|\,d\mu + \int |\tilde{f}_n-f|\,d\mu < \frac{2}{3}\epsilon+\frac{1}{3}\epsilon = \epsilon.$$

<u>6.1.1.</u> $\mu^*(R) \leq \rho(R)$ for alle $R \in \mathcal{R}$.

Bevis:

$\mathcal{C} = R, \emptyset, \emptyset, \cdots$ er en overdekning av R og $|\mathcal{C}| = \rho(R)$

Dette gir $\mu^*(R) \leq \rho(R)$

<u>6.1.2</u> $X = \{1,2\}$, $\mathcal{R} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$, $\rho : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er definert ved $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(\{1\}) = 2$, $\rho(\{1,2\}) = 1$. Da er $\mu^*(\{1\}) < \rho(\{1\})$

Bevis:

Det er klart at $\mathcal{C} = \{1,2\}$ gir minimum for $|\mathcal{C}|$ for overdekninger av $\{1\}$. Altså er $\mu^*(\{1\}) = 1 < 2 = \rho(\{1\})$.

<u>6.1.3.</u> · $X = \mathbb{R}$

· $\mathcal{R} = \emptyset, X$, alle intervaller (a,b), $a<b$.

· $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(X) = \infty$, $\rho((a,b)) = b-a$

a) Hvis $I = [c,d]$ er lukket og begrenset, $\mathcal{C} = \{C_n\}$ en overdekning av I (i $\mathcal{R}$), så fins et endelig antall $C_{i_1}, \cdots, C_{i_m}$ av mengden i $\mathcal{C}$ som overdekker I.

Bevis:

Mengdene i $\mathcal{C}$ er åpne, så dette er bare den endelige overdekningsegenskapen til kompakten I (Teorem 2.6.6).

b) $\mu^*([c,d]) = \rho([c,d]) = d-c$ for alle lukkede og begrensede intervaller.

Bevis:

$\mathcal{C}_\varepsilon = \{(c-\frac{1}{2}\varepsilon, d+\frac{1}{2}\varepsilon)\}$ er en overdekning av $[c,d]$ og $|\mathcal{C}_\varepsilon| = (d-c)+\varepsilon$, altså er $\mu^*([c,d]) \leq (d-c)+\varepsilon$. Siden ε var vilkårlig, har vi $\mu^*([c,d]) \leq d-c$.

La nå $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en vilkårlig overdekning av I i $\mathcal{R}$. a) gir at det fins endelig familie $\mathcal{C}' = \{C_{i_1}, \dots, C_{i_m}\} \subset \mathcal{C}$ som overdekker $I = [c,d]$.
Da fins $(a_1, b_1) \in \mathcal{C}'$ med $c \in (a_1, b_1)$. Enten er $b_1 > d$ eller så fins $(a_2, b_2) \in \mathcal{C}'$ med $b_1 \in (a_2, b_2)$. Vi kan nå fortsette. Siden det er endelig mange intervaller i $\mathcal{C}'$, må vi komme til et intervall (a_k, b_k) med $b_k > d$. $(k \geq 1)$. Vi har derfor et endelig antall intervaller $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ med $a_1 < c$, $b_k > d$ og $b_{i-1} \in (a_i, b_i)$ for $i = 2, \dots, k$. (En tom betingelse for $k=1$).
Dette gir

$$|\mathcal{C}| \geq |\mathcal{C}'| \geq \sum_{i=1}^{k} \rho((a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i)$$

$$= b_k - a_1 + \sum_{i=2}^{k} (b_{i-1} - a_i) > b_k - a_1 > d - c.$$

Dette viser at $\mu^*([c,d]) = \inf\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C}$ er overdekning av $[c,d]\} \geq d - c$.

Altså er $\mu^*([c,d]) = d - c$.

<u>6.1.4.</u> Anta
- $\mathcal{R}$ er σ-algebra
- ρ er et mål på $\mathcal{R}$
- $(X, \overline{\mathcal{R}}, \overline{\rho})$ er kompletteringen av $(X, \mathcal{R}, \rho)$.

Da er $\mu^*(A) = \overline{\rho}(A)$ for alle $A \in \overline{\mathcal{R}}$.

Bevis:
Hvis $A \in \overline{\mathcal{R}}$, så er $A = A' \cup N$, der $A' \in \mathcal{R}$ og $N \in \mathcal{N}$, dvs $N \subset B$ med $\rho(B) = 0$. Da er $\mathcal{C} = \{A', B, \emptyset, \emptyset, \dots\}$ en overdekning av A i $\mathcal{R}$ og $|\mathcal{C}| = \rho(A') + \rho(B) = \rho(A') = \overline{\rho}(A)$.
Dette gir $\mu^*(A) \leq \overline{\rho}(A)$.

Hvis $\mathcal{C} = \{C_n\}$ er en vilkårlig overdekning av A, så har vi

$$\bar{\rho}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\rho}(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(C_n) = |\mathcal{C}|.$$

Dette gir $\mu^*(A) = \inf\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ overdekning av } A\} \geq \bar{\rho}(A)$.

Altså må $\mu^*(A) = \bar{\rho}(A)$.