9/5

6.2.1 Forklar at 6.2.3 (iii) følger av (ii) og (iv)

Svar:

$$E_1, \dots, E_m \in \mathcal{M} \overset{(ii)}{\Rightarrow} E_1^c, \dots, E_m^c \in \mathcal{M} \overset{(iv)}{\Rightarrow} (E_1 \cup \dots \cup E_m)^c = E_1^c \cap \dots \cap E_m^c \in \mathcal{M}$$

$$\overset{(ii)}{\Rightarrow} E_1 \cup \dots \cup E_m = ((E_1 \cup \dots \cup E_m)^c)^c \in \mathcal{M}.$$

6.2.2 Gjør induksjonssteget i Prop 6.2.3(iv)

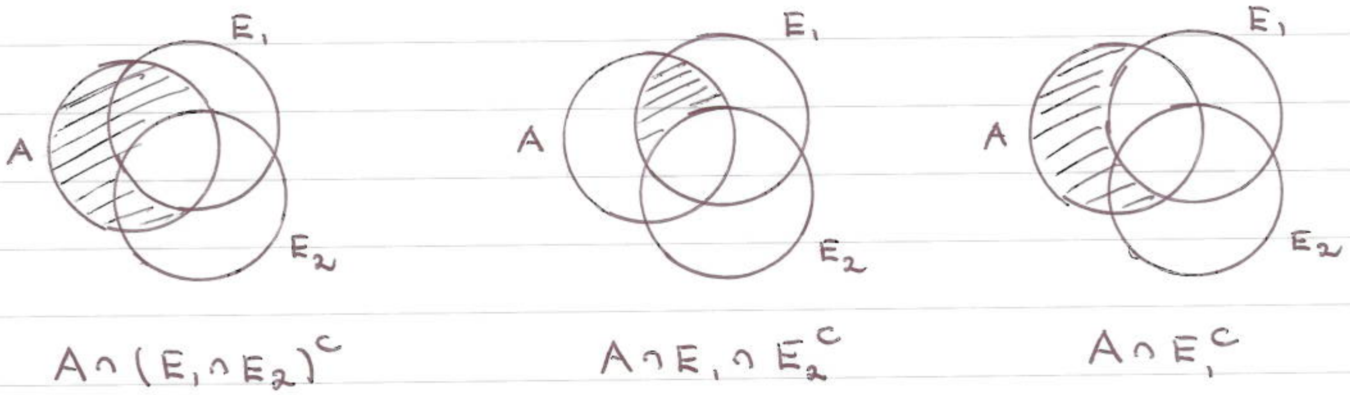
Svar:

Anta (iv) er sann for $1, 2, \dots, n-1$ og la $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}$.
Da er $E_1 \cap \dots \cap E_n = (E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}) \cap E_n \in \mathcal{M}$ siden $E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \in \mathcal{M}$ og snittet av to mengder i $\mathcal{M}$ er i $\mathcal{M}$.

6.2.3 Forklar at $(A \cap E_1 \cap E_2^c) \cup (A \cap E_1^c) = A \cap (E_1 \cap E_2)^c$

Svar:

1) Venn-diagram



2) Med ord: Mengden av $a \in A$ som ikke er i både E_1 og E_2 er lik mengden av $a \in A$ som ikke er i E_1 pluss de som er i E_1, men ikke i E_2.

6.2.4 Gjør induksjonssteget i lemma 6.2.4.

Svar:

Anta sant for $1, 2, \cdots, n-1$ disjunkte målbare mengder. Hvis $E_1, \cdots, E_n$ er disjunkte og målbare har vi da for alle $A \subset X$:

Siden E_n er målbar

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_n)) \overset{\downarrow}{=} \mu^*(A \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_n) \cap E_n^c) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_n) \cap E_n)$$

$$= \mu^*(A \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})) + \mu^*(A \cap E_n) \underset{\uparrow}{=} \mu^*(A \cap E_1) + \cdots + \mu^*(A \cap E_{n-1}) + \mu^*(A \cap E_n)$$

Induksjons hypotesen

6.2.5 I lemma 6.2.5 forklar at $\{E_n\}$ er disjunkte, målbare og har samme union som $\{A_n\}$.

Svar:

Gitt $A_n \in \mathcal{M}$ for alle n. Vi setter

$$E_1 = A_1$$

$$E_2 = A_2 \cap E_1^c = A_2 \cap A_1^c = A_2 \setminus A_1 \quad \Rightarrow \quad E_1 \cup E_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) = A_1 \cup A_2$$

$\vdots$ Induksjon

$$E_n = A_n \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})^c = A_n \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})^c = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$$

$$\Rightarrow E_1 \cup \cdots \cup E_n = (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup (A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}))$$

$$= A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

E_n er de punktene i A_n som er "nye", dvs ikke med i noen av de foregående A-ene (dvs $A_1, \cdots, A_{n-1}$). Det er klart at $\{E_n\}$ blir disjunkte. Identiteten $E_n = A_n \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})^c$ viser at $E_n \in \mathcal{M}$. Det følger også at

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

6.3.1. Hvis $\mathcal{R}$ er semialgebra, $\lambda : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ som i teorem 6.3.6, $\{R_i\}_{i=1}^{n}$, $\{S_j\}_{j=1}^{m}$ mengder i $\mathcal{R}$, $\{R_i\}$ disjunkte og $\{S_j\}$ disjunkte,

$$\bigcup_{i=1}^{n} R_i = \bigcup_{j=1}^{m} S_j$$

så er $\sum_{i=1}^{n} \lambda(R_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda(S_j)$

Bevis:

$$R_i = \bigcup_{j=1}^{m} R_i \cap S_j \overset{(i)}{\Rightarrow} \lambda(R_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda(R_i \cap S_j) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda(R_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda(R_i \cap S_j)$$

$$S_j = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \cap S_j \overset{(i)}{\Rightarrow} \lambda(S_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(R_i \cap S_j) \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \lambda(S_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda(R_i \cap S_j)$$

Summene til høyre er like.

6.3.2 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er σ-endelig hvis $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, der A_n er disjunkte og $\mu(A_n) < \infty$ for alle n.

a) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er σ-endelig $\Leftrightarrow$ Det fins voksende familie $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\mathcal{A}$ med $\mu(E_n) < \infty$ og $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = X$

Bevis:

$\Rightarrow$ La $E_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Da er $\mu(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) < \infty$.

E_n er voksende og $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$

$\Leftarrow$ La $A_1 = E_1$ og $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$ Da er A_n disjunkte,

$\mu(A_n) \leq \mu(E_n) < \infty$ og $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = X$.

b) Lebesgue-målet er σ-endelig

Bevis: $E_n = [-n, n]$, $\mu(E_n) = 2n < \infty$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}$.

c) Hvis målet μ i Prop. 6.3.3 er σ-endelig (og vi antar $A_n \in \mathcal{R}$) må en $\nu(A) = \mu(A)$ for alle $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{B}$. (Dette gir at utvidelsen av premålet ρ til et mål på σ-algebraen generert av $\mathcal{R}$ er entydig.)

Bevis:

La $\{A_n\}$ være disjunkt følge i $\mathcal{R}$ med $\mu(A_n) < \infty$ og $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Hvis $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{B}$ har vi at $\mu(A \cap A_n) \leq \mu(A_n) < \infty$ og derfor er $\nu(A \cap A_n) = \mu(A \cap A_n)$ ved proposisjon 6.3.3 siden $A \cap A_n \in \mathcal{M} \cap \mathcal{B}$. Dette gir

$$\nu(A) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A \cap A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap A_n) = \mu(A).$$

<u>6.3.3</u> $X = \mathbb{Q}$. $\mathcal{R}$ består av alle

- $(r, s]_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} \mid r < q \leq s\}$, $r, s \in \mathbb{Q}$
- $(-\infty, s]_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq s\}$, $s \in \mathbb{Q}$
- $(r, \infty)_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} \mid r < q\}$, $r \in \mathbb{Q}$
- $\emptyset$

a) $\mathcal{R}$ er semialgebra

Bevis:

$$(r_1, s_1] \cap (r_2, s_2] = \begin{cases} (\max(r_1, r_2), \min(s_1, s_2)] & \text{hvis } r_2 < s_1 \text{ og } s_2 > r_1 \\ \emptyset & \text{ellers} \end{cases}$$

$$(r, s] \cap (-\infty, t] = \begin{cases} (r, \min(s, t)] & \text{hvis } t > r \\ \emptyset & \text{ellers} \end{cases}$$

$$(r, s] \cap (t, \infty) = \begin{cases} (\max(r, t), s] & \text{hvis } t < s \\ \emptyset & \text{ellers} \end{cases}$$

$(-\infty, s_1] \cap (-\infty, s_2] = (-\infty, \min(s_1, s_2)]$

$$(-\infty, s] \cap (r, \infty) = \begin{cases} (r, s] & \text{hvis } r < s \\ \emptyset & \text{ellers.} \end{cases}$$

$(r_1, \infty) \cap (r_2, \infty) = (\max(r_1, r_2), \infty)$

(Alle intervaller er $\mathbb{Q}$-intervaller). Alle disse er i $\mathcal{R}$.

$(r, s]^c = (-\infty, r] \cup (s, \infty)$

$(-\infty, s]^c = (s, \infty)$

$(r, \infty)^c = (-\infty, r]$ $\quad\quad \emptyset^c = \mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, \infty)$

Disse er alle disjunkte unioner av mengder i $\mathcal{R}$.

b) σ-algebraen $\mathcal{M}$ generert av $\mathcal{R}$ er familien av alle delmengder av $\mathbb{Q}$. (dvs $\mathcal{M} = 2^{\mathbb{Q}}$)

Bevis:

Anta $s \in \mathbb{Q}$. Da er $\{s\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (s - \frac{1}{n}, s] \in \mathcal{M}$.

Altså er alle ettpunktsmengder med i $\mathcal{M}$. Enhver delmengde $A \subset \mathbb{Q}$ er tellbar, altså en tellbar union av ettpunktsmengder:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{r_n\} \in \mathcal{M}.$$

c) $\rho : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er definert ved $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(R) = \infty$ ellers. ρ oppfyller betingelsen i Caratheodory's teorem for semialgebraer.

Bevis: Nok å vise (ii) siden $\emptyset \in \mathcal{R}$ og $\rho(\emptyset) = 0$.

La $\{R_i\}$ være disjunkt følge i $\mathcal{R}$ og anta at $R = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i \in \mathcal{R}$. Har da to muligheter:

1) $R_i = \emptyset$ for alle i. Da er $R = \emptyset$ og

$$\rho(R) = 0 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho(R_i).$$

2) $R_i \neq \emptyset$ for minst en i. Da er $R \neq \emptyset$ og

$$\rho(R) = \infty = \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho(R_i).$$

d) Det fins uendelig mange utvidelser av ρ til et mål ν på $\mathcal{M}$.

Bevis: Hvis μ er tellemålet og $c > 0$, så er $\nu = c\mu$ en utvidelse av ρ.

<u>6.4.1</u> $\mathcal{R}$ består av disse delmengdene av $\mathbb{R}$

- $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
- $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$
- (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$
- $\emptyset$

$\mathcal{R}$ er en semialgebra

Bevis:

Helt likt oppgave 6.3.3.

<u>6.4.2.</u> Hvis $R_1, \cdots, R_n \in \mathcal{R}$ er disjunkte og $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \in \mathcal{R}$, så er $\lambda(R) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(R_i)$

Bevis: Hvis $R = (-\infty, b]$ eller $R = (a, \infty)$, så kan ikke alle R_i være av typen $(a, b]$, altså må en være uendelig og begge sider er ∞.

Hvis $R = (a, b]$, må alle R_i være endelige og vi kan ordne dem slik: $(a_1, b_1], (a_2, b_2], \cdots, (a_n, b_n]$

der $a_{i+1} = b_i$ og $a_1 = a$, $b_m = b$. Da er

$$\lambda(R) = b - a$$

$$\lambda(R_1) + \cdots + \lambda(R_m) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_m - a_m)$$

$$= b_m - a_1 + \sum_{i=1}^{m-1} (b_i - a_{i+1}) = b_m - a_1 = b - a.$$

<u>6.4.3.</u> Forklar at $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda(R_m) \geq b - a - 2\varepsilon = \lambda(R) - 2\varepsilon$

i beviset for Lemma 6.4.3.

Svar:

Vi antar at $R = (a, b] = \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m$, $R_m = (a_m, b_m]$.

La $\varepsilon > 0$.

De åpne intervallene $\hat{R}_m = (a_m, b_m + \varepsilon/2^m)$ dekker intervallet $I = [a+\varepsilon, b]$. Vi viste da i oppgave 6.1.3 b

at $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda(\hat{R}_m) > b - (a+\varepsilon) = b - a - \varepsilon$

Men $\lambda(\hat{R}_m) = \lambda(R_m) + \varepsilon/2^m$. Dette gir

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda(R_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(\hat{R}_m) - \frac{\varepsilon}{2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(\hat{R}_m) - \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(\hat{R}_m) - \varepsilon \cdot 1 > b - a - \varepsilon - \varepsilon = b - a - 2\varepsilon = \lambda(R) - 2\varepsilon.$$

<u>6.4.4</u> $A \setminus F = G \setminus A^c$ i slutten av Prop 6.4.5

Bevis:

$$A \setminus F = A \setminus G^c = A \cap (G^c)^c = A \cap G.$$

$$G \setminus A^c = G \cap (A^c)^c = G \cap A$$

6.4.5.

G_δ - mengder : $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$, der $O_n \subset \mathbb{R}$ er åpen

F_σ - mengder : $E' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, der $F_n \subset \mathbb{R}$ er lukket.

a) Alle åpne og lukkede mengder er målbare og dermed alle tellbare snitt og unioner av slike. Dermed er G_δ - mengder og F_σ - mengder målbare.

b) Hvis $A \subset \mathbb{R}$ er målbar, så fins en G_δ - mengde G slik at $A \subset G$ og $\mu(G \setminus A) = 0$.

Bevis:

Prop. 6.4.5 gir at for hver $n \in \mathbb{N}$ fins en åpen mengde G_n med $A \subset G_n$ og $\mu(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$. La $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Da er $A \subset G$ og $G \setminus A \subset G_n \setminus A$ for alle n. Altså er

$$\mu(G \setminus A) \leq \mu(G_n \setminus A) < \frac{1}{n} \text{ for alle } n, \text{ så } \mu(G \setminus A) = 0.$$

c) Hvis $A \subset \mathbb{R}$ er målbar, så fins en F_σ - mengde F slik at $F \subset A$ og $\mu(A \setminus F) = 0$.

Bevis:

Prop. 6.4.5. gir at for hver $n \in \mathbb{N}$ fins en lukket mengde $F_n \subset A$ med $\mu(A \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. La $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Da er $F \subset A$ og $A \setminus F \subset A \setminus F_n$ for alle n. Altså er $\mu(A \setminus F) \leq \mu(A \setminus F_n) < \frac{1}{n}$, så $\mu(A \setminus F) = 0$.

6.4.6. Hvis $A \subset \mathbb{R}$ er målbar, $\mu(A) < \infty$ og $\epsilon > 0$, så fins en kompakt $K \subset A$ slik at $\mu(A \setminus K) < \epsilon$.

Bevis:

La $A_m = A \setminus [-m, m]$. Da er $\{A_m\}$ en avtagende følge målbare mengder, $\mu(A_1) < \infty$ og $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m = \emptyset$. Prop. 5.1.5 (b) gir da

$$0 = \mu(\emptyset) = \lim \mu(A_m).$$

Altså fins m slik at $\mu(A_m) < \frac{1}{2}\epsilon$. Prop. 6.4.5 gir at det fins lukket mengde $K \subset A \cap [-m, m]$ med $\mu((A \cap [-m,m]) \setminus K) < \frac{1}{2}\epsilon$. K er begrenset og lukket og derfor kompakt og

$$\mu(A \setminus K) = \mu(A \setminus [-m,m]) + \mu((A \cap [-m,m]) \setminus K) < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$$