16/5.

6.4.7
- $\mathcal{R}$ = semialgebraen gitt i Def. 6.4.1
- $\lambda : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, λ = lengden av intervallet.
- $\mathcal{A}$ = algebraen generert av $\mathcal{R}$
- ρ er premålet på $\mathcal{A}$ som utvider λ
- μ^* er ytre mål generert av ρ
- μ er Lebesguemålet = μ^* restriktert til de målbare mengdene

a) Hvis $E \subset \mathbb{R}$ og $a \in \mathbb{R}$, så er $\mu^*(E+a) = \mu^*(E)$

Bevis:

Vi ser lett at $\lambda(R+a) = \lambda(R)$ for alle $R \in \mathcal{R}$. Dette gir at $\rho(A+a) = \rho(A)$ for alle $A \in \mathcal{A}$. Videre er $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en overdekning av E fra $\mathcal{A}$ hvis og bare hvis $\mathcal{C}' = \{C_n + a\}_{n\in\mathbb{N}}$ er det av $E+a$. Dette gir med en gang at

$$\mu^*(E+a) = \inf|\mathcal{C}'| = \inf|\mathcal{C}| = \mu^*(E).$$

b) Hvis $E \subset \mathbb{R}$ er målbar, så er $E+a$ målbar for alle $a \in \mathbb{R}$.

Bevis:

La $A \subset \mathbb{R}$. Vi har da

$$\mu^*(A \cap (E+a)) + \mu^*(A \cap (E+a)^c) = \mu^*((A-a)\cap E) + \mu^*((A-a)\cap E^c)$$

$= \mu^*(A-a) = \mu^*(A)$, altså er $E+a$ målbar.

c) Hvis $E \subset \mathbb{R}$ er målbar, så er $E+a$ målbar for alle $a \in \mathbb{R}$ og $\mu(E+a) = \mu(E)$.

Bevis:

Første del er bevist i b). Vi har da at

$$\mu(E+a) = \mu^*(E+a) = \mu^*(E) = \mu(E).$$

6.4.8. Definerer en ekvivalensrelasjon i $[0,1)$ ved

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Dette er ekvivalensrelasjon.

Bevis:

1) $x \sim x$ siden $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$

2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ siden $x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Q}$.

3) $x \sim y$ og $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ siden $x - z = (x-y) + (y-z) \in \mathbb{Q}$, siden det er en sum av to rasjonale tall.

6.4.9 Hvis $A \subset \mathbb{R}$ og $r > 0$, la $rA = \{ra \mid a \in A\}$.
Hvis E er målbar, så er også rE målbar og $\mu(rE) = r\mu(E)$.

Bevis:

Vi kan essensielt repetere beviset i oppgave 6.4.7. Vi ser lett at $\lambda(rR) = r\lambda(R)$ for alle $R \in \mathcal{R}$. Dette gir at $\rho(rA) = r\rho(A)$ for alle $A \in \mathcal{A}$. Videre er $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en overdekning av E fra $\mathcal{A}$ hvis og bare hvis $\mathcal{C}' = \{rC_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ er det av rE. Vi har $|\mathcal{C}'| = r|\mathcal{C}|$. Da har vi

$$\mu^*(rE) = \inf |\mathcal{C}'| = r \inf |\mathcal{C}| = r\mu^*(E)$$

for alle $E \subset \mathbb{R}$.

Hvis E er målbar og $A \subset \mathbb{R}$ har vi (merk $(rE)^c = rE^c$)

$$\mu^*(A \cap rE) + \mu^*(A \cap (rE)^c) = \mu^*(A \cap rE) + \mu^*(A \cap rE^c)$$

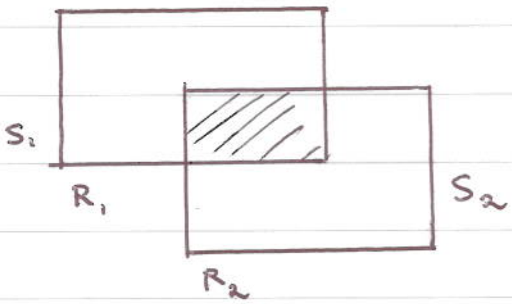
$$= \mu^*\left(r\left(\tfrac{1}{r}A \cap E\right)\right) + \mu^*\left(r\left(\tfrac{1}{r}A \cap E^c\right)\right) = r\left(\mu^*\left(\tfrac{1}{r}A \cap E\right) + \mu^*\left(\tfrac{1}{r}A \cap E^c\right)\right)$$

$= r\mu^*\left(\frac{1}{r}A\right) = r \cdot \frac{1}{r}\mu^*(A) = \mu^*(A)$. Dette viser at rE er målbar. Vi får da

$$\mu(rE) = \mu^*(rE) = r\mu^*(E) = r\mu(E).$$

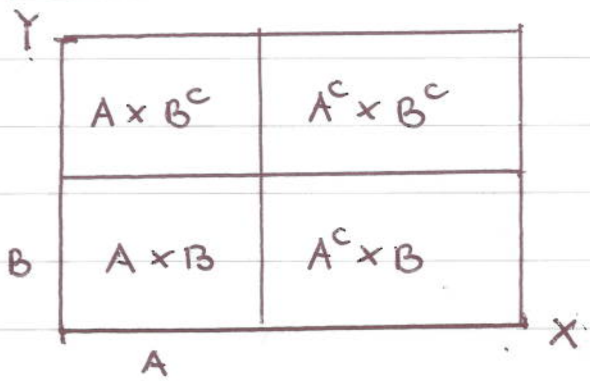
6.6.1 $(R_1 \times S_1) \cap (R_2 \times S_2) = (R_1 \cap R_2) \times (S_1 \cap S_2)$

Bevis:



$$(x,y) \in (R_1 \times S_1) \cap (R_2 \times S_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$(x \in R_1 \wedge y \in S_1) \wedge (x \in R_2 \wedge y \in S_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in R_1 \cap R_2 \ \wedge \ y \in S_1 \cap S_2$$
$$\Updownarrow$$
$$(x,y) \in (R_1 \cap R_2) \times (S_1 \cap S_2).$$

6.6.2. $(A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$, en disjunkt union



$$(x,y) \in (A \times B)^c$$
$$\Updownarrow$$
$$(x,y) \notin A \times B$$
$$\Updownarrow$$
$$x \notin A \ \vee \ y \notin B$$
$$\Updownarrow \quad \text{(Enten begge eller bare 1 oppfylt)}$$
$$(*) \quad (x \notin A \wedge y \notin B) \vee (x \notin A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \notin B)$$
$$\Updownarrow$$
$$(x,y) \in A^c \times B^c \ \vee \ (x,y) \in A^c \times B \ \vee \ (x,y) \in A \times B^c$$
$$\Updownarrow$$
$$(x,y) \in (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c).$$

Vi ser i linjen merket (*) at de 3 tilfellene er innbyrdes ekskluderende, dvs at unionen er disjunkt.

6.6.3 Hvis μ er tellemålet på $\mathbb{N}$, så er $\mu \times \mu$ tellemålet på $\mathbb{N}^2$

Bevis:

$$\mu \times \mu((m,n)) = \mu \times \mu(\{m\} \times \{n\}) = \mu(\{m\})\mu(\{n\}) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Altså er målet av en ettpunktsmengde lik 1. Det følger at målet av en endelig mengde A er $\# A$, antall elementer i A. Hvis A er uendelig, la $A_k = \{(m,n) \in A \mid m \le k, n \le k\}$. Da er $\bigcup A_k = A$, så

$$\mu \times \mu (A) = \lim_{k\to\infty} \mu\times\mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \# A_k = \infty .$$

6.6.4 Enhver åpen mengde i $\mathbb{R}^d$ er en tellbar union av bokser på formen $B = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_d, b_d)$, der $a_1 < b_1,\ a_2 < b_2, \cdots, a_d < b_d$.

Bevis:

La $\mathcal{B}$ være mengden av slike bokser med rasjonale endepunkter, dvs. $a_i \in \mathbb{Q}$ og $b_i \in \mathbb{Q}$ for $i = 1, \cdots, d$. $\mathcal{B}$ er tellbar, siden mengden av endepunkter er en delmengde av $\mathbb{Q}^{2d}$, som er tellbar.

Hvis $O \subset \mathbb{R}^d$ er åpen og $x \in O$, så fins en boks B slik at $x \in B \subset O$, dvs. $a_i < x < b_i$ for $i = 1, 2, \cdots, d$. Da fins rasjonale tall r_i, s_i slik at $a_i < r_i < x < s_i < b_i$. Da vil boksen $B' = (r_1, s_1) \times \cdots \times (r_d, s_d) \subset O$, $x \in B'$ og $B' \in \mathcal{B}$. Dette gir at

$$O = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B},\\ B \subset O}} B$$

, som er en tellbar union.

6.6.5. μ = Lebesgue mål på $\mathbb{R}$, $\lambda = \mu \times \mu$.

a) Hvis D, E er åpne i $\mathbb{R}$, så er $D \times E$ åpen i $\mathbb{R}^2$.

Bevis:

Hvis $(x,y) \in D \times E$, så fins $\epsilon_1 > 0$ og $\epsilon_2 > 0$ slik at $(x-\epsilon_1, x+\epsilon_1) \subset D$ og $(y-\epsilon_2, y+\epsilon_2) \subset E$. Men da er $(x-\epsilon_1, x+\epsilon_1) \times (y-\epsilon_2, y+\epsilon_2) \subset D \times E$, som altså er åpen.

b) Hvis $A, B \subset \mathbb{R}$ er målbare, $\mu(A)$ og $\mu(B) < \infty$ og $\varepsilon > 0$, så fins åpne mengder D og E med $A \subset D$, $B \subset E$ og $\lambda(D \times E) - \lambda(A \times B) < \varepsilon$.

Bevis:

La $\delta < 1$ og velg åpne mengder D og E om A og B slik at $\mu(D) - \mu(A) < \delta$ og $\mu(E) - \mu(B) < \delta$. Dette gir

$$\lambda(D \times E) - \lambda(A \times B) = \mu(D)\mu(E) - \mu(A)\mu(B)$$

$$= \mu(D)(\mu(E) - \mu(B)) + (\mu(D) - \mu(A))\mu(B)$$

$$< \mu(D) \cdot \delta + \delta \cdot \mu(B) = \delta(\mu(D) + \mu(B)) < \delta(\mu(A) + \mu(B) + 1).$$

Hvis vi velger $\delta < \dfrac{\varepsilon}{\mu(A) + \mu(B) + 1}$, så er vi fremme.

c) Hvis $Z \subset \mathbb{R}^2$ er målbar, $\lambda(Z) < \infty$ og $\varepsilon > 0$, så fins åpen mengde $G \subset \mathbb{R}^2$ med $Z \subset G$ og $\lambda(G) - \lambda(Z) < \varepsilon$. Dette gir $\lambda(G \setminus Z) < \varepsilon$.

Bevis:

Det fins målbare mengder $R_n, S_n \subset \mathbb{R}$ slik at $Z \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n \times S_n$ og

$$\lambda(Z) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(R_n \times S_n) - \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Vi velger så åpne mengder $U_n \supset R_n$ og $V_n \supset S_n$ slik at $\lambda(U_n \times V_n) \leq \lambda(R_n \times S_n) + \frac{1}{2^{n+1}}\varepsilon$.

La $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \times V_n$. Da er $Z \subset G$ og

$$\lambda(G) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(U_n \times V_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(R_n \times S_n) + \frac{1}{2^{n+1}}\varepsilon$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(R_n \times S_n) + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \lambda(Z) + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \lambda(Z) + \varepsilon.$$

Prop 5.1.4 c) gir $\lambda(G \setminus Z) = \lambda(G) - \lambda(Z) < \varepsilon$.

d) Anta $Z \subset \mathbb{R}^2$ er målbar og $\varepsilon > 0$. Da fins åpen mengde G slik at $Z \subset G$ og $\lambda(G \setminus Z) < \varepsilon$.

Bevis:

La $Z_n = \{z \in Z : n-1 \leq |z| < n\}$. Da er Z_n disjunkte, målbare, $Z = \cup Z_n$ og $\lambda(Z_n) < \infty$. Vi kan da velge åpne mengder $G_n \supset Z_n$ slik at $G_n \supset Z_n$ og $\lambda(G_n \setminus Z_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.
Det følger at $G = \cup G_n \supset Z$ og

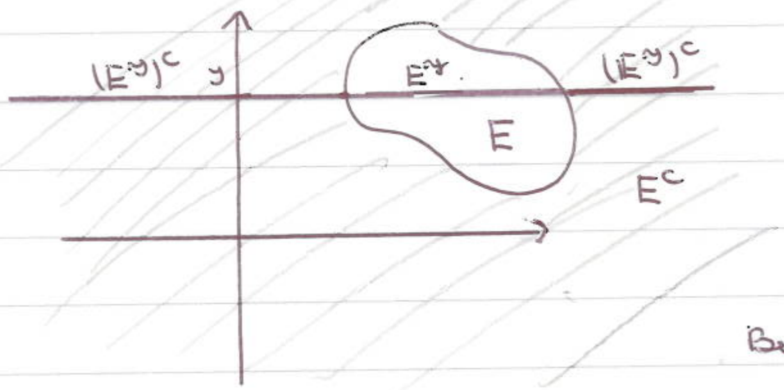
$$G \setminus Z \subseteq \cup G_n \setminus Z_n, \text{ så } \lambda(G \setminus Z) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(G_n \setminus Z_n) < \varepsilon.$$

e) Hvis $Z \subset \mathbb{R}^2$ er målbar og $\varepsilon > 0$, så fins lukket mengde $F \subset Z$ slik at $\lambda(Z \setminus F) < \varepsilon$.

Bevis:

(Som i Prop 6.4.5). Z^c er målbar, altså fins åpen mengde $G \supset Z^c$ slik at $\lambda(G \setminus Z^c) < \varepsilon$. Da er $F = G^c$ lukket, $F \subset Z$ og $Z \setminus F = G \setminus Z^c$ (Oppgave 6.4.4). Dette gir $\lambda(Z \setminus F) = \lambda(G \setminus Z^c) < \varepsilon$.

6.7.1 Vis at $(E^c)^y = (E^y)^c$



Bevis:

$(E^c)^y = \{x \mid (x,y) \in E^c\} = \{x \mid (x,y) \notin E\}$

$(E^y)^c = \{x \mid x \notin E^y\} = \{x \mid (x,y) \notin E\}$.

6.7.2 Vis at $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)^y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^y$

Bevis:

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)^y = \left\{x \mid (x,y)\in \bigcup_{n\in E_n} E_n\right\} = \left\{x \mid (x,y)\in E_n \text{ for minst en } n\right\}$$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^y$$

6.7.3 Vis at $(f^y)^{-1}(I) = (f^{-1}(I))^y$

Bevis:

$$(f^y)^{-1}(I) = \{x \mid f^y(x)\in I\} = \{x \mid f(x,y)\in I\}.$$

$$(f^{-1}(I))^y = \{x \mid (x,y)\in f^{-1}(I)\} = \{x \mid f(x,y)\in I\}.$$

6.7.5 Hvis $\mathcal{M}$ er en monoton klasse, $M\in\mathcal{M}$ og

$$\mathcal{M}(M) = \{F\in\mathcal{M} \mid F\setminus M,\ M\setminus F,\ F\cap M\in\mathcal{M}\} = \{F\in\mathcal{M}\mid F\cap M^c,\ M\cap F^c,\ F\cap M\in\mathcal{M}\}$$

så er $\mathcal{M}(M)$ en monoton klasse.

Bevis:

(i) Anta $F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_n\subset\cdots$ er i $\mathcal{M}(M)$ og la $F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Vi må vise at $F\in\mathcal{M}(M)$:

$F\cap M^c = (\bigcup F_n)\cap M^c = \bigcup F_n\cap M^c \in\mathcal{M}$ siden $E_n = F_n\cap M^c\in\mathcal{M}$ og $E_n\subset E_{n+1}$.

$M\cap F^c = M\cap(\bigcup F_n)^c = M\cap(\bigcap F_n^c) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M\cap F_n^c\in\mathcal{M}$ siden $E_n = M\cap F_n^c\in\mathcal{M}$ og $E_{n+1}\subset E_n$.

$F\cap M = (\bigcup F_n)\cap M = \bigcup F_n\cap M\in\mathcal{M}$ siden $E_n = F_n\cap M\in\mathcal{M}$ og $E_n\subset E_{n+1}$

(ii) Anta $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$ er i $\mathcal{M}(M)$ og la $F=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Vi må vise at $F\in\mathcal{M}(M)$:

$F \cap M^c = (\bigcap F_n) \cap M^c = \bigcap F_n \cap M^c \in \mathcal{M}$ siden $E_n = F_n \cap M^c \in \mathcal{M}$ og $E_{n+1} \subset E_n$.

$M \cap F^c = M \cap (\bigcap F_n)^c = M \cap (\bigcup F_n^c) = \bigcup M \cap F_n^c \in \mathcal{M}$ siden $E_n = M \cap F_n^c \in \mathcal{M}$ og $E_n \subset E_{n+1}$.

$F \cap M = (\bigcap F_n) \cap M = \bigcap F_n \cap M \in \mathcal{M}$ siden $E_n = F_n \cap M \in \mathcal{M}$ og $E_{n+1} \subset E_n$.

6.7.4 $\mathcal{M} = \{M \subset \mathbb{R} \mid 0 \in M\}$ er en monoton klasse, men ikke σ-algebra.

Bevis:

$\mathcal{M}$ er ikke σ-algebra siden $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \notin \mathcal{M}$.

(i) Hvis $E_1 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$ er i $\mathcal{M}$, så er $0 \in E_i$ for alle i og derfor er $0 \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$.

(ii) Hvis $E_1 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$ er i $\mathcal{M}$, så er $0 \in E_i$ for alle i og derfor er $0 \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i$

6.7.6 μ = Lebesgue mål på $\mathbb{R}$, ν = tellemål på $\mathbb{N}$, $\lambda = \mu \times \nu$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ er gitt ved $f(x,n) = \dfrac{1}{1+(2^n x)^2}$

Beregn $\int f \, d\lambda$

Svar: Vi vil bruke Tonelli's teorem, siden $f > 0$. Begge målene er σ-endelige. Vi må vise at f er målbar. For $r \leq 0$ er

$$E_r = \{(x,n) \mid f(x,n) < r\} = \emptyset \text{, altså målbar.}$$

For $r > 0$ er E_r gitt ved ulikheten

$$\frac{1}{1+(2^n x)^2} < r \Leftrightarrow 1 + 4^n x^2 > \frac{1}{r} \Leftrightarrow 4^n x^2 > \frac{1}{r} - 1 \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{4^n}\left(\frac{1}{r} - 1\right)$$

For fast m er dette en åpen mengde $O_m \subset \mathbb{R}$, altså målbar. ($O_m = \mathbb{R}$ for alle m når $n > 1$). Dermed er

$$E_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{m\} \times O_m$$, en tellbar union av målbare

mengder, altså målbar. Vi kan da bruke Tonelli:

$$\int f \, d\lambda = \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{1+4^m x^2} \right) d\nu(m) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{1+4^m x^2}$$

Vi beregner nå det indre integralet ved å bruke det monotone konvergensteoremet og teorem 5.5.9.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{1+4^m x^2} \overset{\text{MKT}}{=} \lim_{n \to \infty} \int_{[-n,n]} \frac{d\mu(x)}{1+4^m x^2} \overset{5.5.9}{=} \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} \frac{dx}{1+4^m x^2} \overset{\text{MAT1100}}{=}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^m} \arctan 2^m x \Big|_{-n}^{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^m} \left(\arctan 2^m n - \arctan(-2^m n) \right)$$

$$= \frac{1}{2^m} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{\pi}{2^m}.$$

Dette gir

$$\int f \, d\lambda = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^m} = \underline{\underline{\pi}}$$