23/5

6.7.7. $f: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ er gitt ved

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3} = \frac{x+y-2y}{(x+y)^3} = \frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3}$$

For $y > 0$ er $\int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3}\,dx$

$$= -\frac{1}{(x+y)} + \frac{y}{(x+y)^2}\Big|_0^1 = \frac{-1}{1+y} + \frac{y}{(1+y)^2} - \left(\frac{-1}{y} + \frac{y}{y^2}\right)$$

$$= \frac{-1-y}{(1+y)^2} + \frac{y}{(1+y)^2} = \frac{-1}{(1+y)^2}$$

For $y = 0$ er $f(x,y) = \frac{1}{x^2}$ og $\int_0^1 f(x,0)\,dx = \infty$. Spiller ingen rolle for

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2}\,dy = \frac{1}{1+y}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Fra identiteten $f(x,y) = -f(y,x)$ får vi da at

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx = -\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = \frac{1}{2}.$$

Fubini's teorem gir at f ikke er integrerbar m.h.p $\lambda = \mu \times \mu$.

6.7.8. $f: [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ er gitt ved

$$f(x,y) = x e^{-x^2(1+y^2)}$$

a) $\int_0^\infty f(x,y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n x e^{-x^2(1+y^2)}\,dx =$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2(1+y^2)} e^{-x^2(1+y^2)} \Big|_0^n = \lim_{n\to 0} \frac{1}{2(1+y^2)}\left(1 - e^{-n^2(1+y^2)}\right) = \frac{1}{2(1+y^2)}$$

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y)\,dx\right) dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{dy}{2(1+y^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \arctan y \Big|_0^n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \arctan n = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}.}}$$

b) Tonelli's teorem gir at f er integrerbar og at

$$\int f \, d(\mu\times\mu) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y)\,dy\right) dx = \frac{\pi}{4}.$$ f er målbar siden f er kontinuerlig.

c) For $x > 0$ er

$$\int_0^\infty x e^{-x^2(1+y^2)}\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^n x e^{-x^2(1+y^2)}\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{xn} e^{-x^2} \cdot e^{-u^2}\,du$$

$u = xy$

$du = x\,dy$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot e^{-u^2}\,du = e^{-x^2} \int_0^\infty e^{-u^2}\,du.$$ For $x = 0$ er integralet 0,

men det spiller ingen rolle for

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty x e^{-x^2(1+y^2)}\,dy\right) dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-u^2}\,du\right) e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-u^2}\,du \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

$$= \left(\int_0^\infty e^{-u^2}\,du\right)^2$$

d) b) gir oss da $\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

6.7.9. • $X = Y = [0,1]$
• μ = Lebesgue mål på X
• ν = tellemål på Y
• $E = \{(x,y) \in X \times Y \mid x = y\}$

Da er $\int \nu(E_x)\,d\mu(x) = 1$, $\int \mu(E^y)\,d\nu(y) = 0$ og $\mu \times \nu(E) = \infty$

(Nesten) Bevis: $E_x = \{x\}$, så $\nu(E_x) = 1$ og $\int_X \nu(E_x)\,d\mu(x) = \int 1 \cdot d\mu(x) = \mu(X) = 1$.

$E^y = \{y\}$, så $\mu(E^y) = 0$ og $\int_Y \mu(E^y)\,d\mu(y) = \int_Y 0 \cdot d\mu(y) = 0$.

For å finne $\mu \times \nu(E)$, må vi overdekke E med en familie $\mathcal{C} = \{C_n\}$, $C_n = A_n \times B_n$, der $A_n \subset X$ og $B_n \subset Y$ er målbare m.h.p μ og ν, dvs $E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times B_n$. La $N_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid \mu(A_n) = 0\}$ og sett

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n \subset X$. Da er $\mu(A) = 0$ og hvis vi setter

$B = I \setminus A$, så er $\mu(B) = 1$. Videre er $\{C_n\}_{n \notin \mathbb{N}_0}$ en overdekning av $B \times B$. Dette betyr at

$B \subset \bigcup_{n \notin \mathbb{N}_0} B_n$ og siden $\mu(B) = 1$, må det finnes en $n_0 \notin \mathbb{N}_0$

slik at $\mu(B_{n_0}) > 0$, men da er B_{n_0} ikke endelig, dvs $\nu(B_{n_0}) = \infty$ og dermed

$$\lambda(A_{n_0} \times B_{n_0}) := \mu(A_{n_0}) \cdot \nu(B_{n_0}) = \infty \quad \text{siden}$$

$\mu(A_{n_0}) > 0$. Dette viser at $(\mu \times \nu)^*(E) = \infty$. Hvis vi antar at E er målbar (dette er ikke opplagt!) følger det at $\mu \times \nu(E) = \infty$.

Dette strider ikke mot Lemma 6.7.3 siden ν ikke er σ-endelig. (Og vi vet egentlig ikke om E er $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ målbar heller.)

6.7.10 • $X = Y = \mathbb{N}$, $\mu = \nu =$ tellemålet.

- $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x = y \\ -1 & \text{hvis } x = y+1 \text{, dvs } y = x-1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

• Da er $\int |f| \, d(\mu \times \nu) = \infty$.

Bevis: $\mu \times \nu$ er tellemålet og $|f(x,y)| = 1$ for uendelig mange (x,y). Dette gir

$$\int |f| \, d(\mu \times \nu) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} |f(x,y)| = \infty$$

• $$\int \left(\int f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \sum_{y=1}^{\infty} \left(\sum_{x=1}^{\infty} f(x,y) \right)$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} \left(f(y,y) + f(y+1,y) \right) = \sum_{y=1}^{\infty} (1-1) = \underline{\underline{0}}$$

• $$\int \left(\int f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\sum_{y=1}^{\infty} f(x,y) \right)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \begin{cases} f(x,x) = 1 & \text{hvis } x = 1 \\ f(x,x-1) + f(x,x) = 0 & \text{hvis } x > 1 \end{cases} = \underline{\underline{1}}$$

7.1.1 $\cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$

$= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y)$

$+ i(\sin x \cos y + \sin y \cos x) \Rightarrow \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

7.1.2 $\cos y = \dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$ $\sin y = \dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$

a) $\sin u \sin v = \dfrac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i} \cdot \dfrac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i}$

$= \dfrac{e^{i(u+v)}-e^{i(u-v)}-e^{i(v-u)}+e^{-i(u+v)}}{-4}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{i(u-v)}+e^{-i(u-v)}-(e^{i(u+v)}+e^{-i(u+v)})}{2}$

$= \frac{1}{2}\cos(u-v) - \frac{1}{2}\cos(u+v)$

b) $\int \sin 4x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos 3x - \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{5}\sin 5x\right) + C$

$= \underline{\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{10}\sin 5x + C}$

c) • $\cos u \cos v = \dfrac{e^{iu}+e^{-iu}}{2} \cdot \dfrac{e^{iv}+e^{-iv}}{2}$

$= \dfrac{e^{i(u+v)}+e^{i(u-v)}+e^{-i(u-v)}+e^{-i(u+v)}}{4}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{i(u+v)}+e^{-i(u+v)}+e^{i(u-v)}+e^{-i(u-v)}}{2}$

$= \frac{1}{2}\cos(u+v) + \frac{1}{2}\cos(u-v)$

• $\int \cos 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x + \cos x \, dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right) + C = \underline{\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C}$

d) • $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$

$\sin(u-v) = \sin u \cos(-v) + \sin(-v)\cos u = \sin u \cos v - \sin v \cos u$

Legg sammen!

$\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2 \sin u \cos v.$

$\Rightarrow \quad \sin u \cos v = \frac{1}{2}\sin(u+v) + \frac{1}{2}\sin(u-v)$

• $\int \sin x \cos 4x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x + \sin(-3x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\int \sin 5x - \sin 3x \, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{3}\cos 3x\right) + C$

$= \frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{10}\cos 5x + C.$

7.1.3 Finn Fourier rekken til $f(x) = e^x$

Svar:

$a_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\, dx$

$= \frac{1}{2\pi(1-in)} e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi(1-in)} e^{\pi}\cdot e^{-in\pi} - e^{-\pi} e^{in\pi}$

$= \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)} e^{\pi} - e^{-\pi} = \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}(1+in)$

Kompleks form: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}(1+in)\, e^{inx}$

Reell form: $(1+in)e^{inx} + (1-in)e^{-inx} =$

$2\,\mathrm{Re}\,(1+in)e^{inx} = 2\,\mathrm{Re}\,(1+in)(\cos nx + i \sin nx)$

$= 2(\cos nx - n \sin nx)$

Reell Fourier rekke

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2 \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} (\cos nx - n \sin nx)$$

7.1.4 Finn Fourier rekken til $f(x) = x^2$

Svar:

$$\alpha_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^{-inx}}_{v'} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x^2 e^{-inx}}{-in} \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x}{in} e^{-inx} dx$$

$$u' = 2x \quad v = \frac{1}{-in} e^{-inx}$$

$$= \frac{2}{in} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Example 1}}}{=} \frac{2}{in} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{in} = (-1)^n \frac{2}{n^2} \qquad n \neq 0.$$

For $n = 0$ får vi $\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi^3 = \frac{1}{3}\pi^2$

Komplekse form: $\frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2} e^{inx}$

Reell form: $e^{inx} + e^{-inx} = 2 \operatorname{Re} e^{inx} = 2 \cos nx$

Reell Fourier rekke: $\frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$.

7.1.5 Finn Fourier rekken til $f(x) = \sin \frac{x}{2} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}$

Svar:

$$\alpha_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i} e^{-inx} dx = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\frac{1}{2}-n)x} - e^{-i(\frac{1}{2}+n)} dx$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{i(\frac{1}{2}-n)} e^{i(\frac{1}{2}-n)x} - \frac{1}{-i(\frac{1}{2}+n)} e^{-i(\frac{1}{2}+n)} \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n}{4\pi i} \left(\frac{e^{i\frac{1}{2}x}}{i(\frac{1}{2}-n)} + \frac{e^{-i\frac{1}{2}x}}{i(\frac{1}{2}+n)} \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n}{4\pi i}\left(\frac{2i}{i(\frac{1}{2}-n)} - \frac{2i}{i(\frac{1}{2}+n)}\right) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-n} - \frac{1}{\frac{1}{2}+n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \cdot \frac{2n}{\frac{1}{4}-n^2} = \frac{(-1)^{n+1}\, n}{\pi i\,(n^2-\frac{1}{4})}$$

Komplekx form : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{\pi i\,(n^2-\frac{1}{4})} e^{inx}$

Reell form : $\dfrac{n e^{inx}}{i} - \dfrac{n e^{-inx}}{i} = 2\,\mathrm{Im}(n e^{inx})$

$= 2n \sin nx$

Reell Fourier rekke : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2n}{\pi(n^2-\frac{1}{4})} \sin nx$

7.1.6.

a) $s_n = a_0 + a_0 r + \cdots + a_0 r^n = \dfrac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r}$ når $r \neq 1$.

Bevis :

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_0 r + \cdots + a_0 r^n \\ r s_n &= \phantom{a_0 + {}} a_0 r + \cdots \phantom{{}+ a_0 r^n} + a_0 r^{n+1} \\ \hline s_n - r s_n &= a_0 - a_0 r^{n+1} = a_0(1-r^{n+1}) \end{aligned}$$

$$s_n = \frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r}.$$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$ når x ikke er heltallig multiplum av 2π.

Svar : Da er $r = e^{ix} \neq 1$ og

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = 1 + r + \cdots + r^n = \frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

c) $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ når x ikke er heltallig multiplum av 2π.

Bevis:

$$e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{2i}\right)}{\left(\frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}\right)}$$

$$= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i\cdot\frac{1}{2}x}}{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}} = \text{(mult med } e^{i\frac{1}{2}x} \text{ i teller og nevner)}$$

$$= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

Resultatet følger nå fra b).

d) $$\sum_{k=0}^{n} \cos kx + i\sin kx = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$ som gir

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{nx}{2} \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

7.1.7 Formelen $\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$

gjelder også for komplekse funksjoner u og v.

Bevis:

Enklest å vise at Leibniz formel $(uv)' = u'v + uv'$ holder.
Dette følger direkte fra at derivasjon er en lineær operator. Men her er regningen:

$u(t) = a(t) + i\,b(t)$

$v(t) = c(t) + i\,d(t)$

(*) $u(t)v(t) = (a(t)c(t) - b(t)d(t)) + i\,(a(t)d(t) + b(t)c(t))$

$u'(t) = a'(t) + i\,b'(t)$

$v'(t) = c'(t) + i\,d'(t)$

(*) gir

$$u(t)v(t) = \big(a'(t)c(t) + a(t)c'(t) - b'(t)d(t) - b(t)d'(t)\big) + i\big(a'(t)d(t) + a(t)d'(t) + b'(t)c(t) + b'(t)c'(t)\big)$$

$$u'(t)v(t) + u(t)v'(t) = (a'(t) + i\,b'(t))(c(t) + i\,d(t)) + (a(t) + i\,b(t))(c'(t) + i\,d'(t))$$

$$= (a'(t)c(t) - b'(t)d(t)) + i\,(b'(t)c(t) + a'(t)d(t)) + (a(t)c'(t) - b(t)d'(t)) + i\,(b(t)c'(t) + a(t)d'(t))$$

$$= \big(a'(t)c(t) - b'(t)d(t) + a(t)c'(t) - b(t)d'(t)\big) + i\big(b'(t)c(t) + a'(t)d(t) + b(t)c'(t) + a(t)d'(t)\big)$$

Ser at dette stemmer.

7.2.1 Hvis $A \subset [-\pi, \pi]$ er målbar, $\epsilon > 0$, så fins en kontinuerlig $f : [-\pi, \pi] \to [0,1]$ slik at $\mu(\{x \mid f(x) \neq 1\!\!1_A(x)\}) < \epsilon$.

Bevis: Proposisjon 6.4.5 gir at det fins en åpen mengde $O \supset A$ og en lukket mengde $K \subset A$ slik at $\mu(O \setminus A) < \frac{1}{2}\epsilon$ og $\mu(A \setminus K) < \frac{1}{2}\epsilon$. K er begrenset og derfor kompakt og vi kan anta at $O \subset X = (-\pi - \epsilon, \pi + \epsilon)$ (ellers erstatter vi bare O med X).

I følge lemma 7.2.1 fins det da en kontinuerlig funksjon $f : X \to [0,1]$ slik at $f(x) = 1$ for alle $x \in K$ og $f(x) = 0$ for alle $x \notin O$. Vi restrikterer så f til $[-\pi, \pi]$. Det følger at

$$\{x \mid f(x) \neq 1\!\!1_A(x)\} \subset (A \setminus K) \cup (O \setminus A)$$

Resultatet følger nå av at $\mu((A \setminus K) \cup (O \setminus A)) \leq \mu(A \setminus K) + \mu(O \setminus A) < \epsilon$.

7.2.2 De kontinuerlige funksjonene er tette i $L^2(\mu)$, dvs. for hver $f \in L^2(\mu)$ og $\epsilon > 0$ fins kontinuerlig $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ slik at $\|f - g\|_2 < \epsilon$.

Bevis: La f_+ og f_- være de positive og negative delene av f, så $f_+, f_- \geq 0$ og $f = f_+ - f_-$. Vi har $f_+ \leq |f|$ og $f_- \leq |f|$, så $f_+, f_- \in L^2(\mu)$.

Proposisjon 5.5.3 gir at det fins en voksende følge g_n av enkle funksjoner, $g_n \geq 0$, slik at $g_n \to f_+$. Det følger at $|f_+ - g_n|^2 \leq |f|^2$ som er integrerbar og LDKT gir da

$$\lim_{n\to\infty} \|f_+ - g_n\|^2 = \lim \int |f_+ - g_n|^2 \, d\mu = \int \lim |f_+ - g_n|^2 \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0.$$

Tilsvarende fins enkle funksjoner $h_n \geq 0$ slik at $\lim \| f_- - h_n \|_2 = 0$. Det følger at

$$\lim_{n\to\infty} \| f - (g_n - h_n)\|_2 = 0$$

Altså fins enkel funksjon k ($= g_n - h_n$ for n stor) slik at $\quad \| f - k\|_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Vi har $k = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, der $A_i \subset [-\pi, \pi]$ er målbar, $\alpha_i \neq 0$.

I følge forrige oppgave fins kontinuerlige funksjoner f_i slik at

$$\mu\{x \mid f_i(x) \neq \mathbb{1}_{A_i}(x)\} < \frac{\varepsilon^2}{4N^2 |\alpha_i|^2}.$$

Dette gir

$$\|\alpha_i \mathbb{1}_{A_i} - \alpha_i f_i\|_2 = |\alpha_i| \, \|\mathbb{1}_{A_i} - f_i\|_2 = |\alpha_i| \left(\int |\mathbb{1}_{A_i} - f_i|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$< |\alpha_i| \left(\frac{\varepsilon^2}{4 N^2 |\alpha_i|^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2N}$$

Vi lar nå $g = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i$. Da er

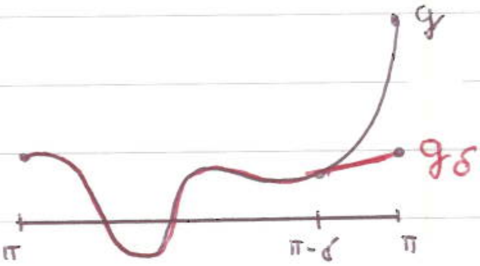
$$\|f - g\|_2 \leq \|f - k\|_2 + \|k - g\|_2 = \|f - k\|_2 + \left\|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} - \alpha_i f_i\right\|_2$$

$$\leq \|f - k\|_2 + \sum_{i=1}^{N} \|\alpha_i \mathbb{1}_{A_i} - \alpha_i f_i\|_2 < \frac{1}{2}\varepsilon + N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon.$$

<u>7.2.3.</u> $C_P = \{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \mid f$ er kontinuerlig og $f(-\pi) = f(\pi)\}$.

C_P er tett i $L^2(\mu)$.

Bevis: Gitt $f \in L^2(\mu)$ og $\epsilon > 0$. Da fins kontinuerlig g slik at $\|f-g\|_2 < \frac{1}{2}\epsilon$. La $N = \sup\{\,|g(x)| : x \in [-\pi,\pi]\,\}$. La $\delta > 0$ være liten og sett



$$g_\delta(x) = \begin{cases} g(x) & \text{hvis } -\pi \le x \le \pi-\delta \\ g(\pi-\delta)\dfrac{\pi-x}{\delta} + g(-\pi)\dfrac{x-(\pi-\delta)}{\delta} & \end{cases}$$

når $\pi-\delta \le x \le \pi$.

Da er g_δ kontinuerlig, $g_\delta = g$ i $[-\pi, \pi-\delta]$, $g_\delta(\pi) = g_\delta(-\pi)$, så $g_\delta \in C_P$ og $|g(x)-g_\delta(x)| \le 2N$ for alle x. Dette gir

$$\|g-g_\delta\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)-g_\delta(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{4N^2}{2\pi}\cdot\delta\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{N}{\sqrt{2\pi}}\,\delta^{\frac{1}{2}}.$$

Hvis vi velger δ så liten at $\frac{N}{\sqrt{2\pi}}\delta^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}\epsilon$ (dvs. $\delta < \frac{\pi\epsilon}{2N^2}$)

så følger det at $\|g-g_\delta\|_2 < \frac{1}{2}\epsilon$ og dermed

$$\|f-g_\delta\|_2 \le \|f-g\|_2 + \|g-g_\delta\|_2 < \epsilon.$$