Utvalgte oppgaver 31/1 Her er to enkle facts om sup:

1) Hvis $A, B \subset \mathbb{R}$ er to mengder som er oppad begrenset og for alle $a \in A$ fins en $b \in B$ slik at $a \leq b$, så er $\sup A \leq \sup B$

2) Hvis $A, B \subset \mathbb{R}$ er to mengder som er oppad begrenset og alle elementer i C er summen av et tall i A og et tall i B (dvs $C \subset A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$), så er

$$\sup C \leq \sup A + \sup B.$$

(Formuler tilsvarende utsagn for inf!)

2.1.2 $X = C([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ er kontinuerlig}\}$

$d_1(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \, ; \, x \in [a,b]\}$ er en metrikk.

Bevis:

Merk at i følge ekstremverdisetningen vil denne supremumen antas i (minst) et punkt $x_0 \in [a,b]$. Vi trenger ikke å bruke dette faktum.

Vi må sjekke at d_1 er en metrikk:

(i) $d_1(f,g) \geq 0$ siden $|f(x)-g(x)| \geq 0$ for alle x.

Hvis $d_1(f,g) = 0$, så må $|f(x)-g(x)| = 0$ for alle x, dvs $f(x) = g(x)$, altså $f = g$.

(ii) $d_1(f,g) = d_1(g,f)$ siden $|f(x)-g(x)| = |g(x)-f(x)|$

(iii) Hvis $f, g, h \in C([a,b])$, så har vi

$$\begin{aligned}
d_1(f,h) &= \sup\{|f(x)-h(x)| : x \in [a,b]\} \\
&= \sup\{|f(x)-g(x)+g(x)-h(x)| \, ; \, x \in [a,b]\} \\
&\overset{1)}{\leq} \sup\{|f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)| : x \in [a,b]\} \\
&\overset{2)}{\leq} \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [a,b]\} + \sup\{|g(x)-h(x)| : x \in [a,b]\} \\
&= d_1(f,g) + d_1(g,h)
\end{aligned}$$

2.1.6. $|\cdot|$ er en norm på vektorrommet V hvis

(1) $|x| \geq 0 \quad \forall x$. Likhet bare når $x = 0$.

(2) $|\alpha x| = |\alpha||x| \quad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

(3) $|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \forall x, y \in V$

$d(x,y) = |x-y|$ er da en metrikk på V

Bevis:

(i) $d(x,y) = |x-y| \geq 0$ i følge (1)

Hvis $d(x,y) = |x-y| = 0$, så er $x-y=0$ i følge (1), altså $x=y$

(ii) $d(x,y) = |x-y| \overset{(2)}{=} |y-x| = d(y,x)$

(iii) Hvis $x, y, z \in V$, så er

$$d(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \overset{(3)}{\leq} |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$$

2.1.9 Hvis d_X er metrikk på X og d_Y er metrikk på Y, så er

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$$

en metrikk på $X \times Y$.

Bevis:

(i) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2) \geq 0$.

Hvis det er 0, må vi ha både $d_X(x_1,x_2) = 0$ og $d_Y(y_1,y_2) = 0$, så $x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2$. Men da er $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

(ii) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$

$= d_X(x_2,x_1) + d_Y(y_2,y_1) = d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$

(iii) La $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$. Da er

$$d((x_1,y_1),(x_3,y_3)) = d_X(x_1,x_3) + d_Y(y_1,y_3)$$

$$\leq d_X(x_1,x_2) + d_X(x_2,x_3) + d_Y(y_1,y_2) + d_Y(y_2,y_3)$$

$$= d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2) + d_X(x_2,x_3) + d_Y(y_2,y_3)$$

$$= d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + d((x_2,y_2),(x_3,y_3))$$

Altså $d((x_1,y_1),(x_3,y_3)) \leq d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + d((x_2,y_2),(x_3,y_3))$

2.2.1. Hvis (X, d) er et diskret metrisk rom, dvs. $d(x,y) = 1$ når $y \neq x$, så gjelder:

$$x_n \to a \iff \text{Det fins } N \in \mathbb{N} \text{ slik at } x_n = a \ \forall n \geq N.$$

Bevis:

$\Rightarrow$ Anta $x_n \to a$ og ~~la~~ la $\varepsilon = 1$. Da fins $N \in \mathbb{N}$ slik at $d(x_n, a) < \varepsilon$ når $n \geq N$. Men hvis $d(x_n, a) < \varepsilon = 1$ så er $x_n = a$.

$\Leftarrow$ Anta at slik N fins og la $\varepsilon > 0$. Hvis $n \geq N$, så er $x_n = a$ og derfor er $d(x_n, a) = 0 < \varepsilon$.

2.2.2 Hvis $f: X \to Y$ er kontinuerlig i a og $g: Y \to Z$ er kontinuerlig i $b = f(a)$, så er $h = g \circ f: X \to Z$ kontinuerlig i a.

Bevis:

La $\varepsilon > 0$. Da fins $\delta_y > 0$ slik at $d_Z(g(y), g(b)) < \varepsilon$ når $d_Y(y, b) < \delta_y$. Dessuten fins $\delta_x > 0$ slik at $d_Y(f(x), f(a)) < \delta_y$ når $d_X(x, a) < \delta_x$. Det følger at $d_Z(h(x), h(a)) < \varepsilon$ når $d_X(x, a) < \delta_x$.

2.2.4 Anta $a \in X$, metrisk rom. Da er
$f(x) = d(x,a)$ kontinuerlig.

Bevis: Må vise at f er kontinuerlig i alle $x \in X$. La $x \in X$ være gitt og $\varepsilon > 0$. Hvis $d(x,y) < \varepsilon$, så har vi

$$|f(x) - f(y)| = |d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y) < \varepsilon$$

altså er f kontinuerlig i x. Vi har her brukt den inverse trekantulikheten.

2.2.7 d_1 og d_2 er ekvivalente hvis $d_1(x,y) \leq K d_2(x,y)$ og $d_2(x,y) \leq M d_1(x,y) \quad \forall x,y \in X$

a) $x_n \to a$ i $d_1 \Leftrightarrow x_n \to a$ i d_2

Bevis:

$\Rightarrow$ Vi har da at $d_1(x_n, a) \to 0$. Men da vil også $d_2(x_n,a) \to 0$ siden $d_2(x_n,a) \leq M d_1(x_n,a)$

$\Leftarrow$ Helt likt.

b) Hvis $f : (X, d_1) \to (Y, d)$ er kontinuerlig, så er $f : (X, d_2) \to (Y, d)$ kontinuerlig.

Bevis: Den er jo bare komposisjonen av $f : (X,d_1) \to (Y,d)$ med $id : (X, d_2) \to (X, d_1)$ som er kontinuerlig i følge a) og prop. 2.2.5.

c) Hvis $g : (Y, d) \to (X, d_1)$ er kontinuerlig, så er $g : (Y,d) \to (X, d_2)$ kontinuerlig.

Bevis: Er komposisjonen av $g : (Y,d) \to (X,d_1)$ med $id : (X, d_1) \to (X, d_2)$.

d) Hvis d_1 og d_2 er ekvivalente og d_2 og d_3 er ekvivalente, så er d_1 og d_3 ekvivalente.

Bevis:

Vi har da $d_1 \le K d_2$ og $d_2 \le M d_1$

og $d_2 \le K' d_3$ og $d_3 \le M' d_2$

Dette gir

$$d_1 \le K d_2 \le (K K') d_3$$

$$d_3 \le M' d_2 \le (M M') d_1$$

altså er d_1 og d_3 ekvivalente.

e) $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$

$d_2(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, \ldots, |x_n-y_n|\}$

$d_3(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$

er ekvivalente metrikker i $\mathbb{R}^n$.

Bevis: Vi skal vise at $d_2 \le d_3 \le d_1 \le n\, d_2$

$d_2 \le d_3$ Siden leddet som har størst verdi av $|x_i - y_i|$ også er med i summen under rottegnet.

$d_3 \le d_1$ Siden

$$d_1^2(x,y) = d_3^2(x,y) + 2\sum_{i<j} |x_i - y_i||x_j - y_j|$$

$d_1 \le n d_2$ Siden hvert ledd i $d_1(x,y)$ er høyst $d_2(x,y)$

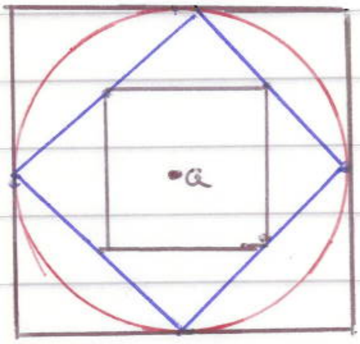
• Hvis $d_1(x,y) \le K d_2(x,y)$ $\forall x,y \in X$, så gjelder for kulene

$$B_{d_2}(a;r) \subset B_{d_1}(a;Kr)$$

For metrikkene d_1, d_2, d_3 har vi da

$B_{d_2}(a, \frac{1}{n}r) \subset B_{d_1}(a,r) \subset B_{d_3}(a,r) \subset B_{d_2}(a,r)$

Her er en tegning av dette.
Forstå tegningen!
(Her er $n = 2$)



2.3.1 (X, d) diskret metrisk rom

a) $B(a,r) = \{x \mid d(a,x) < r\} = \begin{cases} \{a\} & \text{hvis } r \leq 1 \\ X & \text{hvis } r > 1 \end{cases}$

b) Alle delmengder er både åpne og lukkede.
Bevis:
~~Ettpunktsmengdene~~ $\{a\}$ er åpne og enhver delmengde er en union av disse; $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, og derfor åpen ved prop. 2.3.11
Enhver delmengde er også lukket, siden komplementet er åpent.

c) Enhver $f: X \to Y$ er kontinuerlig ved proposisjon 2.3.9. $f^{-1}(V)$ er faktisk alltid åpen, helt uavhengig av hva V er.

2.3.3 $\overline{B}(a;r)$ er lukket.
Bevis: Skal vise at $\overline{B}(a;r)^c = \{x \mid d(a,x) > r\}$ er åpen. Anta $x \in \overline{B}(a;r)^c$ og sett $\delta = d(a,x) - r > 0$. Hvis $y \in B(x,\delta)$, så er $d(a,y) \geq d(a,x) - d(x,y) > d(a,x) - \delta = r$, altså er $B(x,\delta) \subset \overline{B}(a,r)^c$, som dermed blir åpen.

2.3.11

a) En vilkårlig union av åpne mengder, $A = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$, er åpen.

Bevis:

La $x \in A$. Da er $x \in G$ for (minst) en $G \in \mathcal{G}$. Siden G er åpen fins ball $B(x,r) \subset G$. Men da er $B(x,r) \subset A$, altså er A åpen.

b) Et endelig snitt av åpne mengder, $A = G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n$, er åpen.

Bevis: La $x \in A$. Da er $x \in G_i$ for $i = 1, \cdots, n$ og siden G_i er åpen, fins $r_i > 0$ slik at $B(x, r_i) \subset G_i$. Hvis vi setter $r = \min\{r_i \mid i = 1, \cdots, n\}$, så er $B(x,r) \subset G_i$ for alle i, altså er $B(x,r) \subset G_1 \cap \cdots \cap G_n$, som dermed er åpen.

c) Et uendelig snitt av åpne mengder behøver ikke være åpen. Et eksempel er $G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Da er G_n åpen, men $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = \{0\}$ som ikke er åpen.

2.4.3. $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$

Hvis X er komplett, $A_{n+1} \subset A_n$, $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$ og $a_n \in A_n$, så er $\{a_n\}$ konvergent.

Bevis: Det er nok å vise at $\{a_n\}$ er Cauchy. La $\varepsilon > 0$. Da fins N slik at $\operatorname{diam}(A_n) < \varepsilon$ når $n \geq N$. Hvis $n, m \geq N$, så er $a_n \in A_N$ og $a_m \in A_N$, altså er

$$d(a_n, a_m) \leq \operatorname{diam}(A_N) < \varepsilon$$

Dette viser at $\{a_n\}$ er Cauchy.