Utvalgte oppgaver 7/2 (X,d) er alltid et metrisk rom. ①

2.4.6. Vi kan tenke på området vi har kart over som et lukket rektangel R. Dette er da en lukket delmengde av $\mathbb{R}^2$ og derfor komplett. Hvis vi bretter ut kartet mens vi står inne i R får vi en avbildning

$$f: R \to R$$

definert ved $f(p)$ = punktet i R som punktet p på kartet ligger over.

Hvis kartet er i skala $1:K$ (K et stort tall), så er f en kontraksjon:

$$d(f(x), f(y)) = \frac{1}{K} d(x,y)$$

(d er vanlig Euklidsk avstand $d(x,y) = |x-y|$)

Et fikspunkt er da et punkt på kartet som ligger rett over det punktet det forestiller. Banach's fikspunktsats sier at vi har et entydig slikt punkt.

2.4.7 Hvis X er komplett metrisk rom, $f: X \to X$ en funksjon slik at $f^{\circ m}$ er en kontraksjon for en $m \in \mathbb{N}$, så har f et entydig fikspunkt.

Bevis:

Ved fikspunktsaken har $f^{\circ m}$ et entydig fikspunkt, $f^{\circ m}(a) = a$.

Påstår at $f(a) = a$, dvs a er fikspunkt også for f.

Hvis $f(a) = b$, så har vi

$$f^{\circ m}(b) = f^{\circ(m+1)}(a) = f(f^{\circ m}(a)) = f(a) = b$$

så b er fikspunkt for $f^{\circ m}$. Det følger at $b = a$, siden a var entydig, altså er a fikspunkt for f.

Det er det eneste, for hvis $f(b)=b$, så er $f^{\circ n}(b)=b$, altså må vi ha $b=a$.

2.5.1 (X,d) diskret metrisk rom. Da gjelder:

X er kompakt $\Leftrightarrow$ X er endelig.

Bevis:

$\Leftarrow$ Hvis X er endelig og $\{x_n\}$ er en følge i X, så må x_n ha samme verdi uendelig mange ganger, dvs det fins en konstant delfølge $y_k = x_{n_k} = a$. Men da vil $y_k \to a$ og X er kompakt.

$\Rightarrow$ Hvis X ikke er endelig, så fins en følge $\{x_n\}$ i X slik at $x_n \neq x_m$ når $n \neq m$. Hvis y_k er en delfølge, så er også $y_k \neq y_l$ når $k \neq l$ og derfor er $d(y_k, y_l) = 1$. Dermed er $\{y_k\}$ ikke Cauchy og derfor heller ikke konvergent. Altså er ikke X kompakt.

2.5.2 Hvis $x_n \to a$, så vil også alle delfølger konvergere mot a.

Bevis:

Hvis $y_k = x_{n_k}$ er en delfølge og $\epsilon > 0$, så fins N slik at $d(x_n, a) < \epsilon$ når $n \geq N$. Siden n_k vokser mot ∞, fins K slik at $n_k \geq N$ når $k \geq K$. Dette gir at $d(y_k, a) = d(x_{n_k}, a) < \epsilon$ når $k \geq K$.

2.5.4 Definisjonen av en begrenset mengde avhenger ikke av punktet vi måler avstanden fra.

Bevis:

Hvis $b, c \in X$ og $A \subset X$ er en delmengde slik at $d(a,b) \leq K$ for alle $a \in A$. Så er $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) \leq K + d(b,c) =: M$ for alle $a \in A$.

2.5.5 Anta $f: X \to [0,\infty)$ er kontinuerlig og at for alle $\varepsilon > 0$ fins kompakt mengde $K_\varepsilon \subset X$ slik at $f(x) < \varepsilon$ når $x \notin K_\varepsilon$. Da har f (minst) et maksimumspunkt.

Bevis:

Hvis $f(x) = 0$ for alle $x \in X$, så er alle $x \in X$ et makspunkt. Ellers fins x_0 slik at $f(x_0) > 0$. Velg $\varepsilon > 0$ slik at $\varepsilon < f(x_0)$. Da har f et makspunkt i K_ε ved ekstremverdisetningen og dette må også være maks i hele X siden $f(x) < \varepsilon$ når $x \notin K_\varepsilon$.

2.5.6 Hvis X er kompakt, $f: X \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og $f(x) > 0$ for alle $x \in X$, så fins positivt tall slik at $f(x) > a$ for alle $x \in X$.

Bevis: Ved ekstremverdisetningen har f et minimumspunkt x_0. Vi har $f(x_0) > 0$. La da bare $a = \frac{1}{2} f(x_0)$.

2.5.7 Hvis $f: X \to Y$ er kontinuerlig og $K \subset Y$ er kompakt, så er $f^{-1}(K)$ lukket. Finn et eksempel der $f^{-1}(K)$ ikke er kompakt.

Svar: K er lukket i Y (Prop. 2.5.4), så $f^{-1}(K)$ er lukket i X ved Prop. 2.3.10

Hvis $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x) = \arctan x$, så er $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dermed er $f^{-1}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \mathbb{R}$ som ikke er kompakt.

2.5.8. Hvis $A \subset X$ er totalt begrenset, så er A begrenset. Finn et eksempel på at det omvendte ikke er sant.

Svar: Anta at $A \subset X$ er totalt begrenset og velg $b \in X$. Da fins $a_1, \dots, a_n \in A$ slik at $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, 1)$ (sett $\epsilon = 1$ i definisjonen av totalt begrenset). La $K = \text{maks}\{d(a_i, b)\}$. Hvis $x \in A$, så er $x \in B(a_i, 1)$ for en i og dermed er

$$d(x,b) \leq d(x,a_i) + d(a_i, b) \leq 1 + K$$

altså er A begrenset.

Eksempel 1 på side 39 er et eksempel på at det omvendte ikke er sant, siden $\mathbb{N}$ er begrenset, lukket og komplett, men ikke kompakt. Ved teorem 2.5.12 er ikke $\mathbb{N}$ totalt begrenset. Det er også lett å se direkte at definisjonen av totalt begrenset ikke holder når $\epsilon \leq 1$, siden $B(n, \epsilon) = \{n\}$ i det tilfellet.

2.5.9 Bolzano-Weierstrass teorem: Enhver begrenset følge i $\mathbb{R}^n$ har en konvergent delfølge. Vis at

$$K \subset \mathbb{R}^n \text{ er kompakt} \iff K \text{ er lukket og begrenset}$$

Bevis:

$\Rightarrow$ Følger av prop. 2.5.4

$\Leftarrow$ Anta at K er lukket og begrenset og la $\{x_n\}$ være en følge i K. Da er $\{x_n\}$ begrenset, så B-W gir at $\{x_n\}$ har en konvergent delfølge $y_k = x_{n_k}$, dvs. $y_k \to y \in \mathbb{R}$. Men vi må ha $y \in K$ siden K er lukket (Prop. 2.3.6)

- Det er lett å se at om $\{y_m\}$ er en delfølge av $\{x_n\}$ og $\{z_k\}$ er en delfølge av $\{y_m\}$, så er $\{z_k\}$ en delfølge av $\{x_n\}$.

2.5.10 a) Hvis $K_1, \cdots, K_N$ er kompakte delmengder av X, så er $K = K_1 \cup \cdots \cup K_N$ også kompakt.
b) Hvis $\mathcal{K}$ er en familie av kompakter i X, så er også $F = \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K$ kompakt.

Bevis:
a) Hvis $\{x_n\}$ er en följge i K, så fins minst en i slik at K_i inneholder uendelig mange x_n. Det betyr at K_i inneholder en delföljge $\{y_m\}$. Siden K_i er kompakt, har $\{y_m\}$ en konvergent delföljge $\{z_k\}$ i K_i, dvs. $z_k \to z \in K_i \subset K$. Men $\{z_k\}$ er da en konvergent delföljge av $\{x_n\}$ i K.

b) Siden alle $K \in \mathcal{K}$ er lukket, följer det at F er lukket (Prop. 2.3.12). Velg en $K \in \mathcal{K}$. Da er $F \subset K$ en lukket delmengde av kompakten K, altså kompakt ved Prop. 2.5.7.

2.5.11 Hvis $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$ er en följge av ikke-tomme kompakter, så er $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ ikke-tom.

Bevis: For hver n, velg $x_n \in K_n$. Da er $\{x_n\}$ en följge i K_1 og har derfor en konvergent delföljge $\{y_k\}$ i K_1, dvs. $y_k \to y \in K_1$. Påstår at $y \in K_n$ for alle n. Det följer siden $y_k \in K_n$ når $k \geq n$ (i hvertfall!), dvs. K_n inneholder en hale av y_k. Men da må $y \in K_n$ siden K_n er lukket. Altså er $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

2.5.12 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ to metriske rom. Vi antar at (X, d_X) er kompakt og at $f: X \to Y$ er bijektiv og kontinuerlig. Da er $f^{-1}: Y \to X$ kontinuerlig.

Bevis:

Det er nok å vise at $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ er lukket i Y for enhver lukket $F \subset X$ (2.3.10). Men F er kompakt (2.5.7) og derfor er $f(F)$ kompakt (2.5.8).