3.5.4 Anta $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt og at $\{f_n\}$ er en følge kontraksjoner av K. Vis at $\{f_n\}$ har en uniformt konvergent delfølge.

Bevis:

Vi vet at en kontraksjon er kontinuerlig, så $f_n \in C(K, \mathbb{R}^m)$.
Vi skal vise at $\{f_n\}$ oppfyller betingelsene i Prop. 3.5.5.
$\{f_n\}$ er begrenset siden $f_n(K) \subset K$ og K er begrenset.
At f_n er en kontraksjon betyr at det fins en konstant $c_n < 1$ slik at $|f_n(x) - f_n(y)| \leq c_n |x-y|$ for alle $x, y \in K$. Det følger at $|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x-y|$ for alle $x, y \in K$ og alle $n \in \mathbb{N}$. Hvis $\varepsilon > 0$ og vi lar $\delta = \varepsilon$ følger det at $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ når $|x-y| < \delta$, altså er $\{f_n\}$ ekvikontinuerlig.

3.5.5. $\mathcal{K} = \{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0$ og $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$ for alle $x, y \in [-1,1] \}$

$\mathcal{K}$ er en kompakt delmengde av $C([-1,1], \mathbb{R})$

Bevis:

$I = [-1,1]$ er kompakt. Arzelà-Ascoli gir at $\mathcal{K}$ er kompakt hvis den er lukket, begrenset og ekvikontinuerlig.
$\mathcal{K}$ er lukket, for hvis $f_n \in \mathcal{K}$, $f_n \to f$ uniformt, så er $f(0) = \lim f_n(0) = 0$ og $|f(x) - f(y)| = \lim |f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x-y|$.

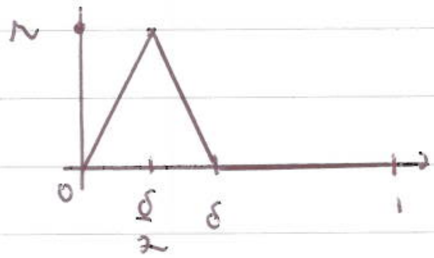
$\mathcal{K}$ er begrenset, for hvis $f \in \mathcal{K}$ og $x \in I$, så er $|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq K|x-0| = K|x| \leq K$.

$\mathcal{K}$ er ekvikontinuerlig, for hvis $\varepsilon > 0$, $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ og $|x-y| < \delta$ så er $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y| < K\delta = \varepsilon$.

3.5.7 Et metrisk rom (X, d) kalles lokalt kompakt hvis alle punkter $a \in X$ har en lukket kule $\overline{B}(a, r)$, $r > 0$, som er kompakt.
$\mathbb{R}^m$ er lokalt kompakt, men ikke $C([0,1], \mathbb{R})$.
Bevis:
$\mathbb{R}^m$ er lokalt kompakt siden $\overline{B}(a, r)$ er lukket og begrenset og derfor kompakt.
For å vise at $C([0,1], \mathbb{R})$ ikke er lokalt kompakt og velg $f = 0$. Da er

$$\overline{B}(f, r) = \{ g \in C([0,1], \mathbb{R}) \mid \sup\{|g(x)| : x \in [0,1]\} \leq r \}$$

$\overline{B}(f, r)$ er lukket og begrenset, men ikke ekvikontinuerlig.
Velg $\epsilon = \frac{1}{2} r$. Hvis $\delta > 0$ er gitt, la g være funksjonen som ser slik ut:



Da er $g \in \overline{B}(f, r)$, men hvis $x = \frac{1}{2}\delta$ og $y = 0$, så er $|x - y| = \frac{1}{2}\delta < \delta$ men $|g(x) - g(y)| = r > \epsilon$.
Altså er $\overline{B}(f, r)$ ikke ekvikontinuerlig.

3.6.1 Hvis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlige og $f_n \to f$ uniformt, så er følgen $\{f_n\}$ begrenset, dvs. det fins $K \in \mathbb{R}$ slik at $|f_n(t)| \leq K$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og $t \in [a, b]$.
Bevis:
f er kontinuerlig, så $f([a,b])$ er kompakt og derfor er $|f(t)| \leq K_0$ for alle $t \in [a,b]$. La $\epsilon = 1$. Da fins N slik at $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon = 1$ for alle $t \in [a,b]$ og $n \geq N$.
Dette gir $|f_n(t)| \leq K_0 + 1$. For hver $n < N$ er $f_n([a,b])$ kompakt, så $|f_n(t)| \leq K_n$ for alle $t \in [a,b]$. La $K = \max\{K_0 + 1, K_1, K_2, \ldots, K_{N-1}\}$. Da er $|f_n(t)| \leq K$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og $t \in [a,b]$.

3.6.2 I oppgave 3.4.1 er $f(y) = 1+y^2$ og i oppgave 3.4.2 er $f(y) = \frac{3}{2} y^{1/3}$. Begge to er kontinuerlige i $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ (og uavhengige av t). Teorem 3.6.2 gir da at initialverdiproblemene vil ha en løsning i et intervall $[0,a]$.

Oppgave 3.4.1 viser at løsningen ikke alltid kan utvides til hele tidsaksen, dvs til $t \in [0,\infty)$.

Oppgave 3.4.2 viser at løsningen ikke alltid er entydig.

I begge tilfellene feiler den uniforme Lipschitz betingelsen for f.

3.7.1 Det fins ingen følge p_n av polynomer slik at $p_n \to f = \frac{1}{x}$ uniformt i $(0,1)$.

Bevis:

Hvis p er et polynom og $|p(x) - \frac{1}{x}| < 1$ for alle $x \in (0,1)$, så er $|p(x)| > \frac{1}{x} - 1$, altså ubegrenset. Det er umulig siden et polynom er begrenset i enhver begrenset mengde.

- De to neste oppgavene bruker at eksponensialfunksjonen vokser raskere enn ethvert polynom i ∞:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$$

Dette følger lett ved å bruke L'Hopital (mange ganger).

3.7.2 Det fins ingen fölge p_n av polynomer slik at $p_n \to f = e^x$ uniformt i $\mathbb{R}$.

Bevis:

Hvis p er et polynom og $|p(x)-e^x| < 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$, så har vi

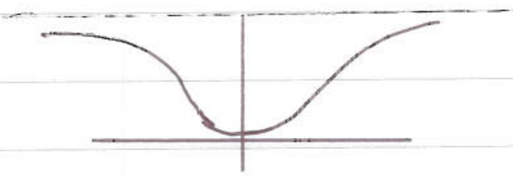
$$\left|\frac{p(x)}{e^x} - 1\right| < e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Altså er

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 1.$$ Dette er umulig.

1.7.3

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



a) For $x \neq 0$ er $f^{(n)} = e^{-1/x^2} \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}$ der $P_1 = 2$,

$P_{n+1}(x) = (2-3nx^2)P_n(x) + x^3 P_n'(x)$, så $\deg P_n \leq 2n-2$.

Bevis:

$f' = e^{-1/x^2} \cdot \dfrac{2}{x^3}$. Formelen er sann for $n=1$.

Anta formelen sann for n. Da har vi:

$$f^{(n+1)}(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \frac{P_n(x)}{x^{3n}} + e^{-1/x^2} \frac{P_n'(x)\cdot x^{3n} - 3n x^{3n-1} P_n(x)}{x^{6n}}$$

$$= \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3n+3}} \cdot \left(2P_n(x) + x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x)\right)$$

$$= \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3(n+1)}} \left((2-3nx^2) P_n(x) + x^3 P_n'(x)\right)$$

Dette viser formelen og at $\deg P_1 = 0$, $\deg P_{n+1} \leq \deg P_n + 2$, som gir $\deg P_n \leq 2n-2$.

b) Vis at $f^{(n)}(0) = 0$ for alle n.

Bevis:

Det er nok å vise at $\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$ for alle n.

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \underset{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \to \pm\infty} e^{-t^2} \frac{P_n(\frac{1}{t})}{(\frac{1}{t})^{3n}} =$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{t^{3n} P_n(\frac{1}{t})}{e^{t^2}} = 0$$. (Telleren er et polynom i t).

c) Taylor polynomene til f i 0 konvergerer mot f bare i punktet 0

Bevis:

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{n!} x^k \equiv 0.$$ Altså konvergerer

Taylor polynomene overalt mot 0. Utsagnet følger nå siden $f(x) \neq 0$ for $x \neq 0$.

(Funksjonen f er et eksempel på en uendelig mange ganger deriverbar funksjon som forsvinner av uendelig orden i 0, uten at funksjonen selv er 0.)

3.7.4 Anta at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og at $\int_a^b f(x)x^n\,dx = 0$ for $n = 0, 1, \dots$. (Vi sier at alle momentene til f er 0.)

a) Vis at $\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = 0$ for alle polynomer p.

Bevis: Et polynom er på formen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$

Vi får

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = \int_a^b f(x)\left(a_n x^n + \dots + a_0\right)dx$$

$$= \int_a^b a_n x^n f(x)\,dx + \int_a^b a_{n-1}x^{n-1} f(x)\,dx + \dots + \int_a^b a_0 f(x)\,dx$$

$$= a_n \int_a^b x^n f(x)\,dx + a_{n-1}\int_a^b x^{n-1} f(x)\,dx + \dots + a_0 \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= a_n \cdot 0 + a_{n-1}\cdot 0 + \dots + a_0 \cdot 0 = 0$$

b) Bruk Weierstrass teorem til å vise at $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$.
Konkluder at $f(x) = 0$ for alle $x \in [a,b]$.

Bevis:

f er begrenset siden $[a,b]$ er kompakt, dvs $|f(x)| \le M \;\forall x$.
La $\delta > 0$. Vi kan da finne polynom $p(x)$ slik at $|f(x) - p(x)| < \delta$ for alle $x \in [a,b]$. Dette gir:

$$\left|\int_a^b f^2(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)f(x)\,dx - \int_a^b f(x)p(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\left(f(x) - p(x)\right)dx\right|$$

$$\le \int_a^b |f(x)|\,|f(x) - p(x)|\,dx \le (b-a)\cdot M \cdot \delta.$$

Dette kan vi få så lite vi vil ved å velge δ liten. Altså er $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$.
f^2 er en positiv kontinuerlig funksjon med integral 0 og må da være identisk lik 0. Men da er også f identisk 0.