12/3.

4.2.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+1}$ konvergerer uniformt på $\mathbb{R}$.

Bevis: Dette følger av Weierstrass M-test (som også gjelder i ubegrensede intervaller), siden

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^2+1} =: M_n$$ siden $\sum M_n$ er konvergent.

4.2.2 Rekken $\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}$ konvergerer ikke uniformt i $(0,\infty)$

To måter å se det på:

1) Summen er (i følge eks. 3) $\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$ i $(0,\infty)$. Denne er ubegrenset og da kan ikke konvergensen være uniform.

2) Alle leddene $n e^{-nx}$ er positive for alle x.
Avviket mellom den uendelige summen og en endelig delsum er derfor minst like stor som neste ledd.
Men

$$\sup\{n e^{-nx} \mid x \in (0,\infty)\} = n$$

som ikke går mot 0.

4.2.3 $f_n : [0,1]$ er gitt ved $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$. Da vil $f_n(x) \to 0$ for alle $x \in [0,1]$ men $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \frac{1}{2}$

Bevis: $f_n(0) = 0$, så $f_n(0) \to 0$. For $0 < x \leq 1$, sett $a = 1-x^2$.
Da er $a < 1$ og det er velkjent fra MAT1100 at $na^n \to 0$
~ Altså vil $f_n(x) = x n a^n \to 0$.

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = \int_1^0 n\cdot u^n\cdot\left(-\tfrac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 n u^n\,du$$

$u = 1-x^2$

$du = -2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\frac{n}{n+1} \to \frac{1}{2}.$$

<u>4.2.6.</u>

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{x}{n}}{n^2}$ konvergerer uniformt på $\mathbb{R}$

Bevis: Weierstrass M-test igjen $\left|\frac{\cos\frac{x}{n}}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} =: M_n$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{x}{n}}{n}$ konvergerer mot kontinuerlig f og $f' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{x}{n}}{n^2}$

Bevis: Vi ser at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{x}{n}}{n}$ konvergerer for $x=0$ og at

$\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{n}\right)' = \frac{\cos\frac{x}{n}}{n^2}$. Korollar 4.2.6 gir da at $f(x) = \sum \frac{\sin\frac{x}{n}}{n}$

konvergerer uniformt på alle begrensede intervaller og

at
$$f'(x) = \sum \left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{n}\right)' = \sum \frac{\cos\frac{x}{n}}{n^2}$$

<u>4.2.7</u> Er formelen $1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}\cos nx$, $x \in (-\pi, \pi)$ korrekt.

Svar:

Nei, for $x=0$ for eksempel er rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n = 2-2+2 \cdots$

som ikke er konvergent.

<u>4.2.8. a)</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ konvergerer uniformt på alle intervaller

$[a, \infty)$ der $a > 1$.

Bevis: Weierstrass M-test

$$\left|\frac{1}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^a} =: M_n \quad \text{når} \quad x \geq a.$$

Det er velkjent fra MAT1100 at $\sum \frac{1}{n^a}$ er konvergent når $a > 1$.

b) La $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ for $x > 1$. Da er $f'(x) = -\sum \frac{\ln n}{n^x}$

Bevis: Vi har $\left(\frac{1}{n^x}\right)' = (n^{-x})' = \left(e^{-x\ln n}\right)' = (-\ln n)\left(e^{-x\ln n}\right)$

$$= \frac{-\ln n}{n^x}$$

så resultatet følger av Kor. 4.2.6. hvis vi kan vise at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ konvergerer uniformt i $[a, \infty)$ for alle $a > 1$.

Men $\left|\frac{\ln n}{n^x}\right| \leq \frac{\ln n}{n^a}$ når $x \geq a$ og $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ er konvergent når $a > 1$.

4.3.1 Finn potensrekken med konvergensradius $0, 1, 2, \infty$

Svar:

$\sum n^n x^n$ $\qquad \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{n^n} = \limsup n = \infty \Rightarrow R = 0$

$\sum x^n$ $\qquad$ har konvergensradius 1

$\sum \left(\frac{x}{2}\right)^n$ $\qquad$ har konvergensradius 2

$\sum \frac{x^n}{n^n}$ $\qquad \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \limsup \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow R = \infty$

$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$ $\qquad$ Har også $R = \infty$.

4.3.2 Finn potensrekker med $R=1$ som konvergerer i 0, 1, 2 endepunkt.

Svar:

0 : $\sum x^n$ Konvergerer for $|x|=1$, men ikke i noen av endepunktene siden leddet ikke går mot 0.

1 : $\sum \frac{x^n}{n}$ $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

For $x=1$ er dette den harmoniske rekken $\sum \frac{1}{n}$ som er divergent, mens for $x=-1$ er det den alternerende harmoniske rekken $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$, som er konvergent.

2 : $\sum \frac{x^n}{n^2}$ $R=1$ igjen. I endepunktene $x=\pm 1$ er $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$, altså er rekken absolutt konvergent og dermed konvergent.

4.3.3 Hvis P er et polynom, så er $\lim \sqrt[n]{|P(n)|} = 1$.

Bevis: Grenseverdiene

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \text{ når } a \in (0,\infty)$$

anses som velkjente.

Hvis P er polynom av grad k,

$$P(x) = a_k x^k + \dots + a_0, \text{ så er}$$

$$|P(x)| = |a_k|\,|x|^k \left| 1 + \frac{a_{k-1}}{a_k x} + \dots + \frac{a_0}{a_k x^k} \right|$$

$$\text{så } \lim |P(n)|^{1/n} = \lim |a_k|^{1/n} \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^k \left| 1 + \frac{a_{k-1}}{a_k n} + \dots + \frac{a_0}{a_k n^k} \right|^{\frac{1}{n}}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

4.3.4. Finn konvergensradien:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^3+1}$ $\quad \frac{1}{R} = \limsup \left(\frac{2^n}{n^3+1}\right)^{\frac{1}{n}} = \limsup \frac{2}{(n^3+1)^{1/n}} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}.$

b) $\sum \frac{2n^2+n-1}{3n+4} x^n$ $\quad \frac{1}{R} = \limsup \frac{|2n^2+n-1|^{1/n}}{|3n+4|^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow R = 1.$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n}$ $\quad c_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{når } n \text{ er liketall} \\ 0 & \text{når } n \text{ er oddetall} \end{cases}$

$$\frac{1}{R} = \limsup |c_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1. \Rightarrow R = 1.$$

4.3.5.

a) Forklar at $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$ for $|x|<1$.

Svar:

Dette er geometrisk rekke $\sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n$ som konvergerer når $|x^2|<1$, dvs $|x|<1$ mot $\frac{1}{1-(x^2)} = \frac{1}{1-x^2}$

b) Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} 2n x^{2n-1} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$ for $|x|<1$

Svar: En potensrekke kan deriveres leddvis i det åpne konvergens-intervallet, så

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} 2n x^{2n-1}.$$

c) Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ for $|x|<1$.

Svar: En potensrekke kan integreres leddvis i det åpne konvergensintervallet:

For $|x|<1$ har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^{2n}\,dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\Big)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt = \frac{1}{2}\big(\ln(1+t) - \ln(1-t)\big)\Big|_0^x =$$

$$\frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

<u>4.3.6.</u> Gitt potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$

a) Konvergensradien er gitt ved $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n+k]{|c_n|}$

Bevis: Å gange potensrekken med $(x-a)^k$ forandrer ikke konvergensradien. Vi får da rekken

$$\sum_{n=\max\{0,-k\}}^{\infty} c_n (x-a)^{n+k}$$

Dette gir formelen over.

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

c) $\limsup \sqrt[n+1]{|(n+1)c_{n+1}|} = \limsup \sqrt[n]{n\,|c_n|} \underset{\uparrow}{=} \limsup \sqrt[n]{|c_n|} \cdot \lim \sqrt[n]{n}$

Oppgave 4.1.6.

$$= \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}.$$

4.4.1

a) Vis at $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ for $|x|<1$

Bevis: Dette er geometrisk rekke $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ som konvergerer mot $\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$ når $|-x|<1$, samme som $|x|<1$.

b) Vis at $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ for $|x|<1$.

Bevis: En potensrekke kan integreres leddvis i det åpne konvergensintervallet:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n \, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n \right) dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1+t} \, dt = \ln(1+t)\Big|_0^x = \ln(1+x)$$

c) Vis at $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = \ln 2$

Bevis: I $x=1$ er rekken i b gitt ved $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$.

Dette er den alternerende harmoniske rekken, som er konvergent. Abel's teorem gir da

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = \lim_{x\to 1} \ln(1+x) = \ln 2.$$