UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT2400 — Reell analyse

Eksamensdag: Tirsdag 7. juni 2016

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (Oppgave 1a), 1b), 2a), osv.) teller 10 poeng. På slutten av oppgavesettet finner du noen opplysninger du kan ha bruk for underveis.

Oppgave 1.

a) Vis at rekken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$
konvergerer uniformt på $\mathbb{R}$, og forklar at funksjonen f definert ved
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$
er kontinuerlig på $\mathbb{R}$.

b) Vis at f er deriverbar i alle punkter $x > 0$. Uttrykk $f'(x)$ som en rekke.

Oppgave 2. Et metrisk rom (X, d) er *lokalkompakt* dersom det for hver $a \in X$ finnes en $r > 0$ slik at den lukkede kulen $\overline{B}(a; r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$ er kompakt.

a) Vis at $\mathbb{R}^n$ er lokalkompakt.

b) Vis at dersom $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, og $d : X \to \mathbb{R}$ er metrikken definert ved $d(x, y) = |x - y|$, så er (X, d) lokalkompakt, men ikke komplett.

Oppgave 3. I denne oppgaven er (X, d) et metrisk rom. Husk at dersom A er en delmengde av X, så er ∂A mengden av alle randpunktene til A. *Tillukningen* til A er mengden $\bar{A} = A \cup \partial A$.

a) Vis at $x \in \bar{A}$ hvis og bare hvis det finnes en følge $\{a_n\}$ av punkter i A som konvergerer mot x.

b) Vis at $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Gi et eksempel på at $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. Dersom $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige, 2π-periodiske funksjoner (dvs. $f(x + 2\pi) = f(x)$ og $g(x + 2\pi) = g(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$), definerer vi *konvolusjonen* $f * g$ til å være funksjonen

$$(f * g)(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u - x)g(x)\, dx$$

a) Vis at $f * g = g * f$.

b) Vis at dersom

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx \quad \text{og} \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}\, dy$$

er Fourierkoeffisientene til f og g, og

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(u)e^{-inu}\, du$$

er Fourierkoeffisientene til $f * g$, så er $c_n = a_n b_n$.

c) Vis at det ikke finnes noen kontinuerlig, 2π-periodisk funksjon $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at $k * f = f$ for alle kontinuerlige f (*Hint*: Det er nok å vise at det ikke finnes noen k slik at $k * e_n = e_n$ for alle $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$).

Oppgave 5

a) Definer funksjonen $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved

$$\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$$

Vis at $\|\cdot\|$ er en norm på $\mathbb{R}^2$.

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er funksjonen $F(x, y) = \|(x, y)\|^2$. Vis at dersom $\mathbf{a} = (1, 1)$ og $\mathbf{r} = (1, 2)$, så eksisterer ikke den retningsderiverte $F'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$. Er F deriverbar i $\mathbf{a}$? (*Hint:* Når du prøver å regne ut den retningsderiverte, kan det lønne seg å se på de ensidige grensene $\lim_{t\to 0^+}$ og $\lim_{t\to 0^-}$ hver for seg.)

c) I dette punktet er $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ et reelt indreproduktrom og $\|\cdot\|$ er normen generert av indreproduktet på vanlig måte, dvs. $\|\mathbf{x}\| = \langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle^{\frac{1}{2}}$. Funksjonen $F : X \to \mathbb{R}$ er definert ved $F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$. Finn et uttrykk for den retningsderiverte til F og vis at F er deriverbar.

Noen opplysninger du kanskje kan ha nytte av

Egenskaper til arctan:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

Aksiomer for normer:

(i) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ med likhet hvis og bare hvis $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(ii) $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha|\|\mathbf{u}\|$.

(iii) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Definisjon av retningsderivert:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{a} + t\mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})}{t}$$

SLUTT