Omskrivning $24/1$

- Man kan vise at $A \Rightarrow B$ ved å vise at "dersom B ikke holder, så er heller ikke A sann", dvs
$$\neg B \Rightarrow \neg A.$$

1.1.1 Hvis x og y er heltall og xy er et liketall, så er minst ett av tallene et liketall.

Bevis: Hvis begge to er odde, dvs.
$$x = 2k+1$$
$$y = 2l+1$$
der $k, l \in \mathbb{Z}$, så er
$$xy = (2k+1)(2l+1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl+k+l)+1$$

Altså er også xy et oddetall. Antagelsen om at begge var odde er derfor feil og minst ett må være et liketall.

1.1.3 Hvis $n \in \mathbb{N}$ og n^2 er delelig med 3, så er n delelig med 3. Vis så at $\sqrt{3}$ er irrasjonal.

Bevis: Hvis n ikke er delelig med 3, så har vi at enten $n = 3k+1$ eller $n = 3k+2$ for en $k \in \mathbb{N}$.

$$n = 3k+1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2+2k)+1$$

$$n = 3k+2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2+4k+1)+1$$

I begge tilfeller er n^2 ikke delelig med 3. Altså må n være delelig med 3.

Vi viser nå at $\sqrt{3}$ er irrasjonal. Anta for motsigelse at $\sqrt{3}$ er rasjonal, dvs.

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n} \qquad \text{der } m, n \in \mathbb{N}$$

Vi kan anta at m og n ikke har felles faktorer. Kvadrering gir

$$3n^2 = m^2$$

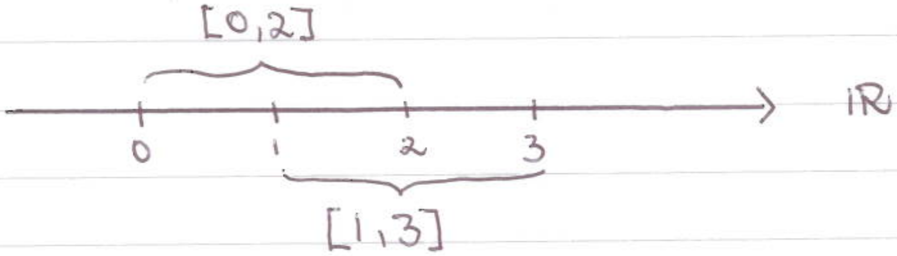
Men da er m delelig med 3, dvs. $m = 3k$ og

$$3n^2 = (3k)^2 = 9k^2, \text{ så } n^2 = 3k^2$$

Dermed er også n delelig med 3. Dette motsier at m og n ikke har felles faktorer.

(En annen måte å si det på er at i ligningen $3n^2 = m^2$ forekommer 3 i en odde potens på venstre side og i en like potens på høyre side)

..2.1



Vi ser at

$$[0,2] \cup [1,3] = [0,3]$$

$$[0,2] \cap [1,3] = [1,2]$$

1.2.2 $U = \mathbb{R}$. Da er $(-\infty, 0)^c = [0, \infty)$

Bevis: Vi har $A^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin A\}$

$$(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

$$\Rightarrow \quad (-\infty, 0)^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$$

- Man kan vise at $A \subset B$ på to forskjellige måter

  1) Vis at hvis $x \in A$, så er $x \in B$

  2) Vis at hvis $x \notin B$, så er $x \notin A$.

- Man kan vise at $A = B$ ved å vise at $A \subset B$ og $B \subset A$. Vi bruker denne notasjonen:

  $\subset$: Bevis for at $A \subset B$

  $\supset$: Bevis for at $A \supset B$.

1.2.3 $A \setminus B = A \cap B^c$

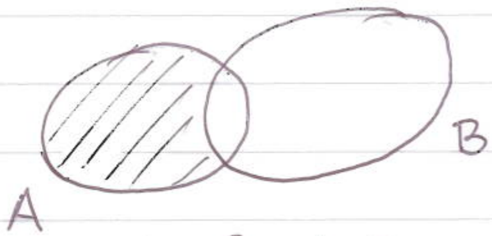
Husk at $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

Bevis:

$\subset$: Hvis $x \in A \setminus B$, så er $x \in A$ og $x \notin B$. Men da er $x \in B^c$ og dermed $x \in A \cap B^c$.

$\supset$: Hvis $x \in A \cap B^c$, så er $x \in A$ og $x \in B^c$, dvs $x \notin B$. Dermed er $x \in A \setminus B$.

Her ville et Venn-diagram vært tilstrekkelig:



$$A \cap B^c = A \setminus B.$$

1.2.5. $B \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2) \cap \cdots \cap (B \cup A_n)$

Bevis:

$\subset$: Hvis $x \in B \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_n)$, så er $x \in B$ eller $x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$. (Denne formuleringen utelukker ikke at x er i begge disse mengdene.) Hvis $x \in B$, så er $x \in B \cup A_i$ for alle $i = 1, \cdots, n$ og derfor $x \in (B \cup A_1) \cap \cdots \cap (B \cup A_n)$. Hvis $x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$, så er $x \in A_i$ for alle i og derfor er $x \in B \cup A_i$ for alle i igjen.

$\supset$: Hvis $x \in (B \cup A_1) \cap \cdots \cap (B \cup A_n)$, så er $x \in B \cup A_i$ for alle i. Da er enten $x \in B$ eller $x \in A_i$ for alle i (eller begge), dvs:

$$x \in B \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$

1.2.6. $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c$

Bevis:

$\subset$: Hvis $x \in (A_1 \cap \cdots \cap A_n)^c$, så er $x \notin A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Da fins (minst) en i slik at $x \notin A_i$, dvs. $x \in A_i^c$. Men da er $x \in A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c$

$\supset$: Hvis $x \in A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c$, så fins (minst) en i slik at $x \in A_i^c$, dvs $x \notin A_i$. Men da er $x \notin A_1 \cap \cdots \cap A_n$, dvs. $x \in (A_1 \cap \cdots \cap A_n)^c$.

1.2.7. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = U \Leftrightarrow A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c = \emptyset$

Bevis:

Dette følger umiddelbart fra 1.2.6.

- Vi bruker i oppgavene i 1.3 følgende velkjente faktum:

  Hvis $x \in \mathbb{R}$, så fins $n \in \mathbb{N}$ slik at $x < n$

  Dette gir også:

  Hvis $x > 0$, så fins $n \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{n} < x$.

1.3.1 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] = \mathbb{R}$

Bevis:

$\subset$: Siden $[-n, n] \subset \mathbb{R}$ for alle n

$\supset$: Hvis $x \in \mathbb{R}$, så fins $n \in \mathbb{N}$ slik at $|x| < n$, dvs. $x \in [-n, n]$.

1.3.2 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$

$\subset$: Hvis $x \neq 0$, så fins $n \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{n} < |x|$, dvs. $x \notin \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ og dermed $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$\supset$: Siden $0 \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

1.3.3. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = (0, 1]$

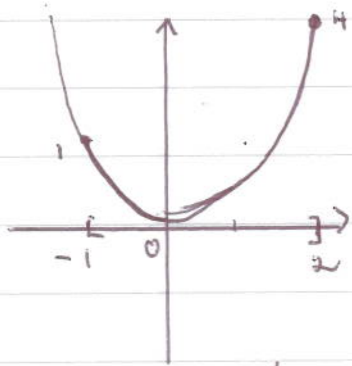
$\subset$: Siden $\left[\frac{1}{n}, 1\right] \subset (0, 1]$ for alle n

$\supset$: Hvis $0 < x \leq 1$, så fins $n \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{n} < x \leq 1$, dvs $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$.

1.3.4. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}] = \emptyset$

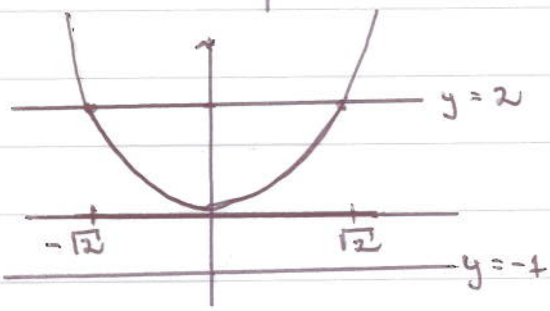
Hvis $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}]$, så må $x > 0$ siden $x \in (0, 1]$. Men da fins $n \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{n} < x$, dvs. $x \notin (0, \frac{1}{n}]$. Dette viser at $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}] = \emptyset$.

1.4.1



$f(x) = x^2$

$f([-1, 2]) = [0, 4]$

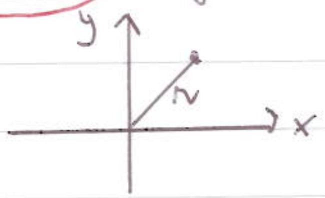


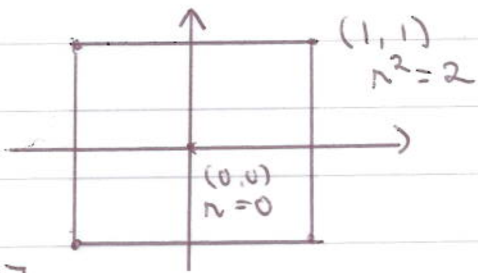
$f^{-1}([-1, 2])$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x^2 \leq 2\}$

$= [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

1.4.2 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$

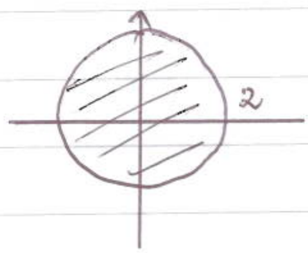




$g([-1, 1] \times [-1, 1]) = [0, 2]$

$g^{-1}([0, 4]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

Lukket disk med radius 2

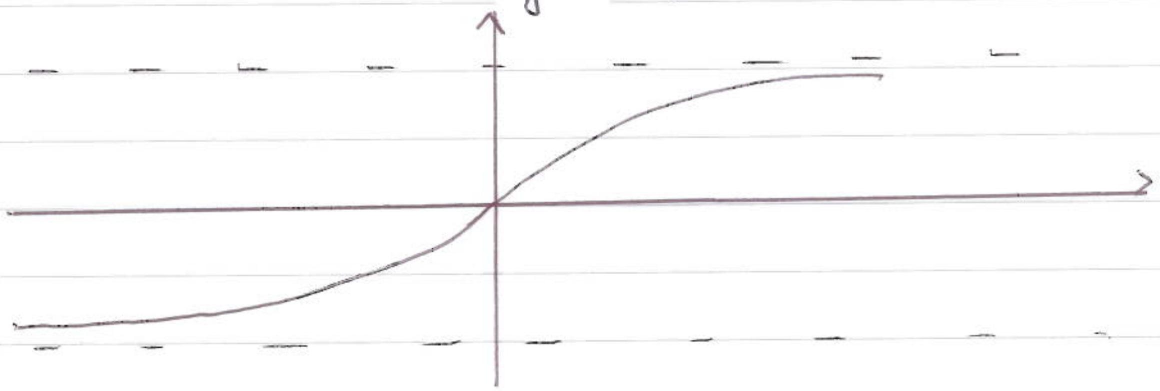


1.4.3 Hvis $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er strengt voksende, så er f injektiv. Må f være surjektiv?

Svar:

f er strengt voksende hvis $f(x) > f(y)$ når $x > y$. Det følger at $f(x_1) \neq f(x_2)$ når $x_1 \neq x_2$, altså er f injektiv.

f må ikke være surjektiv. Den kan f.eks. se slik ut:



En slik funksjon er f.eks $f(x) = \arctan x$. Da er $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \neq \mathbb{R}$.

1.4.5 Finn en funksjon $f: X \to Y$ og en mengde $A \subset X$ slik at vi hverken har $f(A^c) \subset f(A)^c$ eller $f(A)^c \subset f(A^c)$

Svar:

Hvis f er injektiv, så er $f(A^c) \subset f(A)^c$.
Hvis f er surjektiv, så er $f(A)^c \subset f(A^c)$.

Vi må derfor finne f som hverken er injektiv eller surjektiv. La $X = Y = \{1,2\}$ og $f: X \to Y$ være definert ved $f(1) = f(2) = 1$. Hvis $A = \{1\}$, så er

$$f(A^c) = \{f(2)\} = \{1\}$$
$$f(A)^c = \{1\}^c = \{2\}.$$

Ingen av disse er inneholdt i den andre.

1.5.2 $\mathcal{L} = \{ L \subset \mathbb{R}^2 \mid L$ er en linje$\}$. Vi definerer for $L, M \in \mathcal{L}$: $L \sim M \Leftrightarrow L$ og M er paralelle.

Dette er en ekvivalensrelasjon.

Bevis:

(i) For alle $L \in \mathcal{L}$ gjelder at $L \sim L$ siden enhver linje er parallell med seg selv.

(ii) Hvis $L \sim M$ så er $M \sim L$ siden begge bare betyr at L og M er paralelle.

(iii) Hvis $L \sim M$ og $M \sim N$, så er L paralell med M og M paralell med N. Men da er L paralell med N også, dvs $L \sim N$.

1.5.4. Anta $m \in \mathbb{N}$. Vi definerer en relasjon i $\mathbb{Z}$:

$x \equiv y \Leftrightarrow x - y$ er delelig med m, dvs. $x - y = km$ der $k \in \mathbb{Z}$.

(Vi sier at x er kongruent med y modulo m.) Dette er en ekvivalensrelasjon. Vi har m forskjellige ekvivalensklasser, klassene til tallene $0, 1, 2, \cdots, m-1$.

Bevis:

(i) $x \equiv x$ siden $x - x = 0 = 0 \cdot m$

(ii) Hvis $x \equiv y$, så er $x - y = km$. Men da er $y - x = (-k)m$, så $y \equiv x$.

(iii) Hvis $x \equiv y$ og $y \equiv z$, så er $x - y = km$ og $y - z = lm$ der $k, l \in \mathbb{Z}$. Men da er $x - z = (x-y) + (y-z) = km + lm = (k+l)m$, altså er $x \equiv z$.

Ingen av tallene i $I = \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ er ekvivalente for hvis $k_1, k_2 \in I$ og $k_1 < k_2$, så er $0 < k_2 - k_1 < m$, altså er $k_2 - k_1$ ikke delelig med m.

Påstår at enhver $x \in \mathbb{Z}$ er ekvivalent med en (og bare en) $y \in I$. Hvis $x \geq 0$ kan vi dele x med m og får da en rest $y < m$, dvs.

$$x = km + y \quad \text{der } 0 \leq y \leq m-1. \quad (*)$$

Men da er $x - y = km$, dvs. $x \equiv y$. Det er lett å se at om $x < 0$ kan vi også skrive $x = km + y$ der $0 \leq y \leq m-1$. (Sjekk dette selv. Da er $k < 0$). Igjen har vi $x \equiv y$.

Dette beviser den siste påstanden.
En ekvivalensklasse ser altså slik ut

$$[i] = \{ i + km \mid k \in \mathbb{Z} \} \quad \text{der } i = 0, \dots, m-1.$$

F.eks. med $m = 7$ og $i = 4$ har vi

$$[4] = \{ \dots, -10, -3, 4, 11, 18, \dots \}$$

Merk at vi har

$$[4] = [11] = [18] = [-3] \quad \text{o.s.v.}$$

1.6.1 En delmengde B av en tellbar mengde A er selv tellbar.

Bevis: Vi har en liste

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

som inneholder alle elementer i A. Men denne listen inneholder jo da også alle elementer i B, altså er B tellbar.
(Det står ingen ting i definisjonen om at listen ikke kan inneholde noen elementer som ikke er i A. Men en slik liste kan alltid lages ved å stryke de som ikke er i A.)

1.6.3 $A = \{(q_1, \cdots, q_k) \mid k \in \mathbb{N}$ og $q_j \in \mathbb{Q}$ for $j = 1, \cdots, k\}$ er tellbar. (Merk at k ikke er fast!)

Bevis:

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{(q_1, \cdots, q_k) \mid q_j \in \mathbb{Q} \;\; j = 1, \cdots, k\}$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{k \text{ ganger}} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^k .$$

Dette er en tellbar union av tellbare mengder og er derfor tellbar. $\mathbb{Q}^k$ er et tellbar fordi den er et kartesisk produkt av tellbare mengder.

1.6.5 Mengden av alle delmengder av $\mathbb{N}$ er ikke tellbar.

Bevis: Anta (for motsigelse) at

$$B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$$

er en liste over alle delmengder av $\mathbb{N}$. Vi skal lage en ny delmengde B som ikke er i listen. Dette vil gi en motsigelse.

Vi definerer

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin B_n\}$$

Da er $B \subset \mathbb{N}$ og det følger at $B \neq B_n$ for alle n siden

$$n \in B_n \Rightarrow n \notin B$$

$$n \notin B_n \Rightarrow n \in B .$$