Oppgaven 21/2.

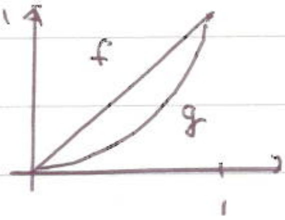
3.3.1 $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. Hva er $\rho(f,g)$?

Svar:

$\rho(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$

La $h(x) = f(x) - g(x) = x - x^2$. $h'(x) = 1 - 2x$. h har maks i $x = \frac{1}{2}$.

$$\rho(f,g) = h(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}.$$



3.3.2 $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

Hva er $\rho(f,g)$?

Svar: La $h(x) = f(x) - g(x) = \sin x - \cos x$, $h'(x) = \cos x + \sin x = 0$ når $\tan x = -1$, dvs $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$

$h_{max} = h(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - (-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

$h_{min} = h(\frac{7}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

$\rho(f,g) = \max\{|h(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \sqrt{2}$.

3.3.3 Bevis positivitet og symmetri for ρ i Prop. 3.3.2

Bevis:

(i) Positivitet: $\rho(f,g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\} \geq 0$, siden $d_Y(f(x), g(x)) \geq 0$ for alle $x \in X$. Hvis $\rho(f,g) = 0$, så er $d_Y(f(x), g(x)) = 0$ for alle $x \in X$, dvs $f(x) = g(x)$, altså er $f = g$.

(ii) Symmetri:

$\rho(f,g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\} = \sup\{d_Y(g(x), f(x)) \mid x \in X\} = \rho(g,f)$

Følger altså automatisk fra symmetrien til d_Y.

3.3.4 $C_0(X,Y) = \{f \in C(X,Y) \mid f$ er begrenset, dvs. det fins $a \in Y$ og $K \in \mathbb{R}$ slik at $d_Y(a, f(x)) \leq K$ for alle $x \in X\}$.

For $f, g \in C_0(X,Y)$ definerer vi

$$\rho(f,g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

a) $\rho(f,g) < \infty$ for alle $f, g \in C_0(X,Y)$

Bevis:

Hvis $d_Y(a, f(x)) \leq K$ og $d_Y(a, g(x)) \leq L$ for alle $x \in X$, så er

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq d_Y(f(x), a) + d_Y(a, g(x)) \leq K + L$$

for alle $x \in X$, altså er $\rho(f,g) \leq K + L$.

b) Det fins eksempler der $\rho(f,g)$ ikke oppnås.

Eksempel: $X = (0,1)$, $f = x$, $g = 0$.

Da er $\rho(f,g) = \sup\{|x| : x \in (0,1)\} = 1$

Men det fins ingen x slik at $|f(x) - g(x)| = x = 1$.

c) ρ er en metrikk.

Bevis: Positivitet og symmetri følger som i oppgave 3.3.3. Vi må vise trekantulikheten. La $f, g, h \in C_0(X,Y)$.

La $\epsilon > 0$. Da fins $x \in X$ slik at $d_Y(f(x), g(x)) > \rho(f,g) - \epsilon$.

Dette gir

$$\rho(f,g) - \epsilon < d_Y(f(x), g(x)) \leq d_Y(f(x), h(x)) + d_Y(h(x), g(x))$$

$$\leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$$

Siden ϵ var vilkårlig, har vi $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$

d) Hvis $\{f_n\}$ er en følge i $C_0(X,Y)$ og $f_n \to f$ uniformt, så er $f \in C_0(X,Y)$.

Bevis: Fra Prop. 3.2.4 vet vi at f er kontinuerlig. Vi må vise at f er begrenset. La $\epsilon = 1$. Da fins N slik at $d_Y(f_n(x), f(x)) < 1$ for alle $n \geq N$ og $x \in X$. Vi vet at f_N er begrenset, så det fins $a \in Y$ og $K \in \mathbb{R}$ slik at $d_Y(f_N(x), a) \leq K$ for alle $x \in X$. Dette gir

$$d_Y(f(x), a) \leq d_Y(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), a) \leq 1 + K$$

altså er f begrenset.

e) Hvis Y er komplett, så er $(C_0(X,Y), \rho)$ komplett.

Bevis:

Hvis $\{f_n\}$ er en Cauchy-følge i $C_0(X,Y)$, så følger det som i Teorem 3.3.4 at f_n er uniformt konvergent, dvs. $f_n \to f$ uniformt. Fra punkt d) har vi at $f \in C_0(X,Y)$. Altså er $C_0(X,Y)$ komplett.

f) La c_0 være mengden av alle begrensede følger i $\mathbb{R}$ og sett $\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$

Da er (c_0, ρ) et komplett metrisk rom.

Bevis:

Vi setter $X = \mathbb{N}$ med diskret metrikk og $Y = \mathbb{R}$ med standard metrikk. Alle funksjoner $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige. De kan identifiseres med mengden av reelle følger $\{x_n\}$ ved $x_n = f(n)$. De begrensede følgene blir da identifisert med $C_0(X,Y)$ og ρ er den samme som metrikken på $C_0(X,Y)$. Det følger av e) at (c_0, ρ) er et komplett metrisk rom.

3.4.1 Vi løser $y' = 1+y^2$, $y(0)=0$ på MAT1100 vis:

$$\frac{dy}{dt} = 1+y^2$$. Separerer variable

$$\frac{dy}{1+y^2} = dt$$ Integrerer

$$\arctan y = t + C$$

$$y = \tan(t+C) \qquad y(0) = \tan C = 0, \; C = 0.$$

$y = \tan t$. Løsningen er bare definert forover i tid på intervallet $[0, \frac{\pi}{2})$. Hvis vi tar med også bakover i tid, er den definert i $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

3.4.2 La $a \geq 0$ og sett

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq a \\ (t-a)^{3/2} & t > a \end{cases} \Rightarrow y'(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq a \\ \frac{3}{2}(t-a)^{1/2} & t > a \end{cases} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$$

(y er deriverbar i $t=a$ med derivert 0)

Dessuten er $y(0)=0$. Altså har ikke initialverdi problemet $y' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$, $y(0)=0$ en entydig løsning.

Dette strider ikke mot Teorem 3.4.3 fordi $f(y) = \frac{3}{2}y^{1/3}$ ikke er uniformt Lipschitz i $[0,\infty)$. Lipschitz betingelsen feiler i 0.

3.4.3 Hvis $g : [0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt , $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er definert ved

$$f(t,u,v) = \begin{pmatrix} v \\ g(t,u,v) \end{pmatrix}$$

og $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ er en løsning av initialverdiproblemet

$$\bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t)) \qquad \bar{y}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

så har vi

$$\bar{y}'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$$

$$f(t, \bar{y}(t)) = \begin{pmatrix} v(t) \\ g(t, u(t), v(t)) \end{pmatrix}$$

så $u'(t) = v(t)$

og $u''(t) = v'(t) = g(t, u(t), u'(t))$

$$\bar{y}(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

dvs. $u(0) = a$ og $u'(0) = b$, dvs. u løser (*).

3.5.1 $\mathbb{R}^n$ er separabel for alle n.

Bevis:

$\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ er tellbar (1.6.3 + 1.6.1). Hvis $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^n$, så fins for hver i en följe $\{q_j^i\}_{j=1}^{\infty}$ slik at $q_j^i \to a_i$ når $j \to \infty$. Da vil $\bar{q}_j = (q_j^1, \cdots, q_j^m) \to \bar{a}$.

3.5.2 $A \subset (X, d)$ er tett $\Leftrightarrow$ Alle åpne kuler $B(a, r)$, $a \in X$, $r > 0$ inneholder elementer fra A.

Bevis: Dette har vi vist i övelse 2.6.1.

3.5.3 Anta (X, d) komplett og at $A \subset X$ er tett.

a) Hvis $f : A \to \mathbb{R}$ er unifomt kontinuerlig, $a_n \in A$ og $a_n \to x \in X$, så vil $\{f(a_n)\}$ konvergere. Grensen er den samme for alle följer som konvergerer mot samme punkt x.

Bevis:

La $\varepsilon > 0$. Da fins $\delta > 0$ slik at $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$ når $d(a, b) < \delta$. Siden $a_n \to x$ fins N slik at $d(a_n, x) < \frac{1}{2}\delta$ når $n \geq N$. Dette gir $d(a_n, a_m) < \delta$ når $n, m \geq N$, altså er $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$. Det betyr at $\{f(a_n)\}$ er Cauchy og derfor konvergent siden $\mathbb{R}$ er komplett.

Hvis $b_n \to x$, så fins M slik at $d(b_n, x) < \frac{1}{2}\delta$ når $n \geq M$. For $n \geq \max\{N, M\}$ har vi da $d(a_n, b_n) < \delta$, så $|f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon$. Dette viser at $\{f(a_n)\}$ og $\{f(b_n)\}$ har samme grense.

b) Vi definerer $\bar{f}: X \to \mathbb{R}$ ved $\bar{f}(x) = \lim f(a_n)$ der $a_n \in A$ og $a_n \to x$. $\bar{f}$ er uniformt kontinuerlig.

Bevis:

Gitt $\varepsilon > 0$. Da fins $\delta > 0$ slik at om $a, b \in A$ og $d(a,b) < \delta$, så er $|f(a) - f(b)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. La $x, y \in X$ og anta $d(x,y) < \delta$. Sett $r = \frac{1}{2}(\delta - d(x,y))$. Da fins $a \in B(x,r) \cap A$ og $b \in B(y,r) \cap A$ slik at $|\bar{f}(x) - f(a)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ og $|\bar{f}(y) - f(b)| < \frac{1}{3}\varepsilon$.

Videre har vi

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,y) + d(y,b) < r + d(x,y) + r = \delta$$

Dette gir

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| \leq |\bar{f}(x) - f(a)| + |f(a) - f(b)| + |f(b) - \bar{f}(y)|$$

$$< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Altså er $\bar{f}$ uniformt kontinuerlig.

c) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definert ved

$$f(q) = \begin{cases} 0 & q < \sqrt{2} \\ 1 & q > \sqrt{2} \end{cases}$$

er kontinuerlig, men ikke uniformt kontinuerlig.

Bevis:

$U_1 = \{q \mid q < \sqrt{2}\}$ og $U_2 = \{q \mid q > \sqrt{2}\}$ er åpne i $\mathbb{Q}$ og $U_1 \cup U_2 = \mathbb{Q}$ og $f^{-1}(A)$ er en av mengdene $\emptyset, U_1, U_2, \mathbb{Q}$ som er åpen, uansett hva A er. Derfor er f kontinuerlig.

La $\varepsilon = 1$. Gitt $\delta > 0$, så fins $q_1 \in U_1$ og $q_2 \in U_2$ med $|q_1 - q_2| < \delta$. Men $|f(q_1) - f(q_2)| = 1 \geq \varepsilon$.

d) f har ingen kontinuerlig utvidelse til $\mathbb{R}$.

Bevis: Hvis $q_n \in U_1$, $q_n \to \sqrt{2}$, så vil $f(q_n) = 0 \to 0$ når $n \to \infty$. Men hvis $q_n \in U_2$, $q_n \to \sqrt{2}$, så vil $f(q_n) = 1 \to 1$ når $n \to \infty$. f har altså ingen grense i $\sqrt{2}$ og kan ikke utvides kontinuerlig.