Differensiallikningen for $p(t)$ er

$$\dot{p}(t) = -H'_x\big(t, x^*(t), u^*(t), p(t)\big) = 2x^*(t) \tag{$*$}$$

Fra $\dot{x}^*(t) = u^*(t)$ og $u^*(t) = p(t)/2c$ følger det at

$$\dot{x}^*(t) = p(t)/2c \tag{$**$}$$

Vi har nå to førsteordens differensiallikninger $(*)$ og $(**)$ som kan brukes til å bestemme funksjonene p og x^*. For å finne løsningene av dette systemet, bruker vi et vanlig triks og differensierer $(*)$ m.h.p. t (se avsnitt 2.7). Dette gir annenordenslikningen $\ddot{p}(t) = 2\dot{x}^*(t) = p(t)/c$, hvis generelle løsning er

$$p(t) = Ae^{rt} + Be^{-rt}, \quad \text{der } r^2 = 1/c$$

Med randbetingelsene $p(T) = 0$ og $\dot{p}(0) = 2x^*(0) = 2x_0$ får vi at $Ae^{rT} + Be^{-rT} = 0$ og $r(A - B) = 2x_0$. Disse to likningene løser vi mph. A og B:

$$A = \frac{2x_0 e^{-rT}}{r\big(e^{rT} + e^{-rT}\big)}, \quad B = \frac{-2x_0 e^{rT}}{r\big(e^{rT} + e^{-rT}\big)}$$

Derfor er

$$p(t) = \frac{2x_0}{r\big(e^{rT} + e^{-rT}\big)}\left[e^{-r(T-t)} - e^{r(T-t)}\right]$$

som medfører at

$$x^*(t) = \tfrac{1}{2}\dot{p}(t) = x_0 \frac{e^{r(T-t)} + e^{-r(T-t)}}{e^{rT} + e^{-rT}}$$

Hamilton-funksjonen $H = -x^2 - cu^2 + pu$ er konkav i (x, u), som bekrefter at vi har funnet løsningen på problemet. ∎

Oppgaver til avsnitt 12.2

Løs følgende kontrollproblemer:

1 $\displaystyle \max_{u(t)\in(-\infty,\infty)} \int_0^2 [e^t x(t) - (u(t))^2]\,dt, \quad \dot{x}(t) = -u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(2)$ fri

2 $\displaystyle \min_{u(t)\in(-\infty,\infty)} \int_0^1 [x(t) + (u(t))^2]\,dt, \quad \dot{x}(t) = -u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1)$ fri

3 $\displaystyle \max_{u\in(-\infty,\infty)} \int_0^{10} \big[1 - 4x(t) - 2(u(t))^2\big]\,dt, \quad \dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(10)$ fri

4 (S 1987) $\displaystyle \max_{u\in(-\infty,\infty)} \int_0^T (x - u^2)\,dt, \quad \dot{x} = x + u, \quad x(0) = 0, \quad x(T)$ fri