Med denne nye definisjonen av Hamilton-funksjonen sier det „sanne" maksimumsprinsippet at hvis $(x^*(t), u^*(t))$ er et optimalt par for standardproblemet (1)–(3), fins det en konstant p_0, som enten er 0 eller 1, og en kontinuerlig og stykkevis kontinuerlig deriverbar funksjon $p(t)$, slik at

$$\text{hvis } p(t) = 0 \text{ for en } t \in [t_0, t_1], \text{ er } p_0 = 1 \tag{11}$$

Dessuten er betingelsene (5)–(7) oppfylt.

Anta at endebetingelsen er at $x(t_1)$ er fri. Siden $p(t_1) = 0$ ifølge (7) (iii'), medfører betingelsen (11) at $p_0 = 1$. Dermed er setning 12.2.1 helt korrekt som formulert. Men setning 12.4.1 må altså modifiseres.

Hvis $p_0 = 1$, er betingelsene i det sanne maksimumsprinsippet identiske med de i setning 12.4.1. I noen kontrollproblemer kan betingelsene i maksimumsprinsippet bare tilfredsstilles med $p_0 = 0$. (Se oppgave 11.) Vi må imidlertid innrømme at slike problemer er nokså uvanlige ettersom betingelsene i maksimumsprinsippet da ikke forandres om f erstattes med en vilkårlig funksjon. Kriteriefunksjonen spiller altså ingen rolle. (En vil bare oppleve å få $p_0 = 0$ i problemer der, løselig sagt, endebetingelsen er så krevende at den gir få eller ingen valg for u.) Per definisjon er et standard problem **normalt** dersom ingen optimal kontroll tilfredsstiller (det sanne) maksimumsprinsippet for $p_0 = 0$.

Det neste eksemplet viser et typisk resonnement som er nødvendig for å *bevise* at $p_0 \neq 0$.

EKSEMPEL 5 Betrakt igjen eksempel 4,

$$\text{maks} \int_0^1 (2x - x^2)\,dt, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad u \in [-1, 1]$$

(Den sanne) Hamilton-funksjonen er $H = p_0(2x - x^2) + pu$, og differensiallikning for p er $\dot{p} = -H'_x = -p_0(2 - 2x^*(t))$. Anta at $p_0 = 0$. Da er $\dot{p} = 0$ slik at p er en konstant, $p(t) = \bar{p}$. På grunn av (11) er denne konstanten $\bar{p} \neq 0$. Nå må en optimal kontroll maksimere $pu = \bar{p}u$ for $u \in [-1, 1]$. Hvis $\bar{p} > 0$, er tydeligvis $u^*(t) = 1$. Dette betyr at $\dot{x}^*(t) \equiv 1$, med $x^*(0) = 0$, slik at $x^*(t) \equiv t$. Dette motsier endebetingelsen $x^*(1) = 0$. Hvis $\bar{p} < 0$, må vi ha $u^*(t) \equiv -1$, og $\dot{x}^*(t) \equiv -1$, med $x^*(0) = 0$, slik at $x^*(t) \equiv -t$. Dette motsier igjen endebetingelsen. Vi slutter at $p_0 = 0$ er umulig. Dermed må vi ha $p_0 = 1$.

Oppgaver til avsnitt 12.4

1 Betrakt følgende problem med T som fast positiv konstant:

$$\text{maks} \int_0^T x(t)\,dt, \quad \dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(T) \text{ fri}, \quad u(t) \in [0, 1]$$

(a) Hva er den åpenbare løsningen av problemet? Beregn den tilordnede verdien, $V(T)$, av kriteriefunksjonen.

(b) Finn løsningen ved å bruke setningene 12.4.1 og 12.4.2.

2 Løs følgende problem:

$$\text{maks} \int_0^1 (1 - x^2 - u^2)\,dt, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad x(1) \geq 1, \quad u \in (-\infty, \infty)$$

3 Betrakt problemet i eksempel 12.2.1.

(a) Erstatt $u \in (-\infty, \infty)$ med $u \in [0, 1]$ og finn den optimale løsningen.

(b) Erstatt $u \in (-\infty, \infty)$ med $u \in [-1, 1]$ og finn den optimale løsningen dersom $T > 2$.