

4 Løs følgende problemer. Beregn også den tilhørende verdien av kriteriefunksjonen.

(a) maks $\int_0^{10} x dt$, $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $x(10) = 2$, $u \in [0, 1]$

(b) maks $\int_0^T x dt$, $\dot{x} = u$, $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$, $u \in [0, 1]$
(med $x_0 < x_1 < x_0 + T$)

5 Betrakt problemet (T fast positivt tall)

$$\text{maks} \int_0^T -(u^2 + x^2) dt, \quad \dot{x} = au, \quad x(0) = 1, \quad x(T) \text{ fri}, \quad u(t) \in [0, 1]$$

(a) Skriv ned betingelsene i setning 12.4.1 for dette problemet.

(b) Hva er løsningen hvis $a \geq 0$?

(c) Finn løsningen hvis $a < 0$. (Vink: Prøv $u^*(t) \in (0, 1)$ for alle t .)

6 Finn de eneste mulige løsningene av følgende varianter av problemet i eksempel 12.1.1:

(a) maks $\int_0^5 (1-s)k dt$, $\dot{k} = sk$, $k(0) = 1$, $k(5)$ fri, $\hat{u} \in [0, 1]$

(b) maks $\int_0^{10} (1-s)\sqrt{k} dt$, $\dot{k} = s\sqrt{k}$, $k(0) = 1$, $k(10)$ fri, $\hat{u} \in [0, 1]$

7 Løs følgende spesialtilfelle av problem I i eksempel 12.1.2:

$$\text{maks} \int_0^5 [10u - (u^2 + 2)]e^{-0.1t} dt, \quad \dot{x} = -u, \quad x(0) = 10, \quad x(5) \geq 0, \quad u \geq 0$$

8 (Fra Kamien og Schwartz (1981).) En bedrift har en bestilling på B enheter av en vare som skal leveres på tidspunkt T . La $x(t)$ være varebeholdningen på tidspunkt t . Vi antar at kostnaden ved å lagre $x(t)$ enheter per tidsenhet er $ax(t)$. Veksten i $x(t)$, som er lik produksjonen per tidsenhet, er gitt ved $u(t) = \dot{x}(t)$. Anta at total kostnad av produksjon per tidsenhet er lik $b(u(t))^2$. Her er a og b positive konstanter. Bedriftens naturlige problem er dermed

$$\min \int_0^T [ax(t) + b(u(t))^2] dt, \quad \dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(T) = B$$

hvor vi i tillegg krever at $u(t) \geq 0$.

(a) Skriv ned de nødvendige betingelsene som setning 12.4.1 her impliserer.

(b) Finn den eneste mulige løsningen av problemet, og forklar hvorfor dette virkelig er en løsning. (Vink: Skill mellom tilfellene $B \geq aT^2/4b$ og $B < aT^2/4b$.)

9 Betrakt problemet

$$\text{maks} \int_0^2 (x^2 - 2u) dt, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad x(2) \text{ fri}, \quad u \in [0, 1]$$

(a) Skriv ned betingelsene i setning 12.4.1 for dette problemet.

(b) Vis at $p(t)$ er strengt avtakende, og finn den eneste mulige løsningen av problemet.