12.4

10 Betrakt problemet

$$\text{maks} \int_0^2 u\,dt, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad x(2) \leq 1, \quad u \in [-1, 1]$$

(a) Bevis at den tilordnede adjungerte variabelen $p(t)$ er en konstant, og vis at denne konstanten må være lik -1. Men da er $H \equiv 0$, og $u^*(t)$ er ikke bestemt av maksimumsbetingelse (5).

(b) Vis at *en hvilken som helst* kontroll som medfører at $x^*(2) = 1$, løser problemet.

11 Betrakt problemet

$$\text{maks} \int_0^1 -u\,dt, \quad \dot{x} = u^2, \; x(0) = x(1) = 0, \; u \in (-\infty, \infty)$$

(a) Forklar hvorfor $u^*(t) = x^*(t) = 0$ løser problemet.

(b) Vis at betingelser i det sanne maksimumsprinsippet (se avsnitt om degenererte problemer) tilfredsstilles kun for $p_0 = 0$.

12.5 Maksimumsprinsippets relasjon til klassisk variasjonsregning

Som nevnt generaliserer kontrollteorien klassisk variasjonsregning. La oss nå se hva maksimumsprinsippet sier om et standard variasjonsproblem der vi har tre alternative terminalbetingelser:

$$\text{maks} \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\,dt, \qquad x(t_0) = x_0, \qquad \begin{cases} \text{(i)} & x(t_1) = x_1 \\ \text{(ii)} & x(t_1) \geq x_1 \\ \text{(iii)} & x(t_1) \text{ fri} \end{cases} \tag{1}$$

Vi overfører dette problemet til et kontrollproblem ved simpelthen å la $\dot{x}(t)$ være en kontrollvariabel og dermed sette $\dot{x}(t) = u(t)$. Siden vi i problemet (1) ikke har noen restriksjoner på $\dot{x}(t)$, får vi ingen krav på kontrollfunksjonen $u(t)$, slik at $U = (-\infty, \infty)$.

Vi har nå overført problemet til et standard kontrollproblem, der differensiallikningen (12.4.2) er spesielt enkel. Hamilton-funksjonen blir her $H(t, x, u, p) = F(t, x, u) + pu$, og maksimumsprinsippet krever at om $u^*(t)$ skal løse problemet, må H som funksjon av u ha maksimum i $u^*(t)$. Siden $U = (-\infty, \infty)$, er det en nødvendig betingelse for maksimum at

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} + p(t) = 0 \tag{$*$}$$

Differensiallikningen for $p(t)$ blir

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \tag{$**$}$$

Deriverer vi $(*)$ mhp. t, får vi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) + \dot{p}(t) = 0 \tag{$***$}$$